REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK, TIRANË
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE
DOKTOR

TITULLI

Përafrime numerike të zgjidhjeve të problemeve jolineare stokastike të reaksion difuzionit me zhurmë të bardhë ose me zhurmë reale në hapësira të Sobolevit

Paraqitur nga:

M.Sc. Sofije Hoxha

Udhëheqës shkencor:

Prof. Dr.Fejzi Kolaneci

Tiranë, 2022

UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISE MATEMATIKE DHE INXHINIERISE FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISE MATEMATIKE

Disertacion
I
Paraqitur nga

M.Sc. Sofije Hoxha

Për marrjen e gradës shkencore

DOKTOR

Programi i studimit : Analizë Numerike dhe Ekuacione Diferenciale

Tema : Përafrime numerike të zgjidhjeve të problemeve jolineare stokastike të reaksion difuzionit me zhurmë të bardhë ose me zhurmë reale në hapësira të Sobolevit

Udhëheqës Shkencor: Prof. Dr. Fejzi Kolaneci

Mbrohet më dt 27. 04. 2022. para jurisë:

1. Prof. Dr. Shkëlqim KUKA	**Kryetar**
2. Prof. Dr. Lulëzim HANELLI	**Anëtar (oponent)**
3. Prof. As. Eglantina KALLUCI	**Anëtar (oponent)**
4. Prof. Dr. Luela PRIFTI	**Anëtar**
5. Prof. Dr. Shpëtim LEKA	**Anëtar**

PARATHËNIE

FALENDERIME

Falenderimet kryesore shkojnë për Fakultetin e Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike si dhe Departamentin e Inxhinierisë Matematike, për mbështetjen dhe ndihmën e vazhdueshme në realizimin e studimit të doktoratës.

Dua të falenderoj udhëheqësin tim shkencor, Prof. Dr.Fejzi Kolaneci për mbështetjen e tij të pakursyer për realizimin e këtij punimi.

Së fundmi, falenderoj familjen time për mbështetjen dhe përkrahjen e vazhdueshme që më kanë dhënë gjatë gjithë kësaj kohe.

PËRMBLEDHJE

Në këtë studim në fillim do të shqyrtohen probleme jolineare stokastike të reaksion-difuzionit në hapësirë-kohë, me zhurmë të bardhë ose me zhurmë reale. Do të studjohet dhe do të vërtetohen teorema përkatëse për ekzistencën dhe unicitetin e zgjidhjes së problemeve që do të shtrohen në hapësira të Sobolevit. Më tej, do të analizohen përafrime numerike të zgjidhjeve duke përdorur metoda të ndryshme, për ekuacionet me terma jolineare Lipshisiane dhe jo-Lipshisiane.

Objektiv kryesor do të jetë vërtetimi i konvergjencës probabilitare uniforme në lidhje me variablin e kohës t, të zgjidhjeve të përafërta tek zgjidhjet e sakta të problemeve që shqyrtohen. Vëmendje e veçantë i kushtohet metodës Galerkin, skemave implicite, përafrimeve sipas normës Holder dhe metodës me diferenca të fundme Godunov-Rabjenkin. Gjithashtu, do të studiohen përafrime numerike të zgjidhjeve për problemet jolineare stokastike të Shredingerit dhe të Boussinesq-Gloverit. Rezultatet teorike të përfituara do të zbatohen në disa probleme konkrete të shkencave teknike dhe biomjekësore.

Abstract

In this study we will first study nonlinear stochastic reaction-diffusion problems with white space-time or real-time noise. The existence and uniqueness of Sobolev's problem-solving space will be proven. Numerical approximations of the solution will then be analyzed using different methods and nonlinear Lipshician and non-Lipshician terms will be examined.

The main goal is to prove the probabilistic convergence of approximate solutions to the correct solution of the problem under consideration, uniformly with respect to the time variable. Particular attention will be paid to the Galerkin method, implicit schemes, approximations to the Holder norm, and the Godunov-Rabjenkin method with finite differences. Numerical approximations of the solutions of Schrodinger and Boussinesq-Glover nonlinear stochastic problems will also be studied. Approximate theoretical results will be applied to concrete problems of technical sciences and biomedicine.

Përmbajtja e lëndës

Hyrje	1
KAPITULLI 1	
Ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjeve stacionare për ekuacionet e reaksion difuzionit jolineare të rastit në hapësirat Banah	3
1.1 Ekuacioni i zhurmës	4
1.2. Ekuacioni evolucionar i rastit me operatorë monotonë	6
1.2.1 Pranimet	6
1.2.2 Një vlerësim paraprak	8
1.3. Ekzistenca e zgjidhjeve stacionare	12
1.3.1 Përkufizimi i zgjidhjeve stacionare	12
1.3.2 Rezultati kryesor	13
1.3.3 Shuma e operatorëve monotonë	17
1.4 Zbatime të ekuacioneve të reaksion-difuzionit jolineare të rastit me zhurmë reale	18
KAPITULLI 2	
Ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjeve për ekuacionet dy-dimensionale stokastike lineare të Businesk	
2.1 Hyrje	20
2.2 Hapësirat funksionale dhe formulimi i problemit	20
2.3 Ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjeve	22
KAPITULLI 3	26
Uniciteti sipas trajektoreve dhe konvergjenca e zgjidhjeve të përafërta për një model stokastik të rritjes së tumorit me zhurmë të ngjyrosur	30
3.1 Hyrje	30
3.2 Uniciteti sipas trajektoreve	31
3.3 Konvergjenca e zgjidhjeve të përafërta probabilitare	33
3.4 Zbatime	34
3.4.1 Ritmi i përhapjes së qelizave tumorale të ndjeshme ndaj ilaceve	34
3.4.2 Termi i zhurmës	35
3.4.3 Zhurma e qelizave të ndjeshme të tumorit të asgjësura për shkak të ilaçeve kundër kancerit	36
3.4.4 Trajektoria e termit të zhurmës	36

KAPITULLI 4	
Atraktorët e rastit për ekuacionet gjysmëlineare stokastike të reaksion difuzionit me zhurmë reale në hapësirat e Hilbertit	38
4.1 Bashkësitë thithëse dhe atraktorët	38
4.2 Bashkësitë thithëse në hapësirën Hilbert H	41
PËRFUNDIME DHE REKOMANDIME	43
BIBLIOGRAFIA	45

HYRJE

Teoria e ekuacioneve jo-lineare të reaksion –difuzionit të rastit është një nga objektet e rëndësishme që është studjuar nga shumë autorë në shtete të ndryshme të botës. Në punimin tonë, së pari studjohet një problem jo-linear i reaksion-difuzionit në hapësirën Banah, të drejtuar nga një zhurmë reale, me koeficient të difuzionit të rastit dhe kushte fillestare të rastit. Ky problem i përket klasës së ekuacioneve diferenciale të pjesshme stokastike parabolike. Supozohet se kushti fillestar është një element i hapësirës Hilbert. Zhurma reale është një proces Wiener. Fillimisht konsiderohet një bazë e përshtatshme stokastike dhe jepet kuptimi i zgjidhjes së dobët të problemit të reaksion-difuzion. Më tej përkufizohet kuptimi i zgjidhjes së fortë Doob-Rozanov për procesin stokastik stacionar. Funksioni i shpërndarjes probabilitare të procesit stokastik është i pavarur nga koha t. Jepet kuptimi i masës invariante (të pandryshueshme) për ekuacionin e rastit të reaksion-difuzionit në kuptimin e Arnold, DaPrato dhe Zabczyk, [2, 5]. Me fjalë të tjera, përkufizohet masa stacionare për sistemin dinamik të rastit, të shoqëruar me problemin e rastit të reaksion-difuzionit.

Duke zbatuar Teorinë e Mosbarazive Variacionale, vërtetohen vetitë e zgjidhjes stacionare për problemin jo-linear të reaksion-difuzionit të rastit. Rezultatet teorike të fituara mund të jenë të dobishme në zbatime të ndryshme në Fizikën Kuantike, Biologji, Mjekësi dhe Shkencat Ekonomike, [3, 4, 6, 7, 8, 18, etj.]. Në studimin tonë tregohet ekzistenca e zgjidhjes stacionare për një model stokastik që modelon rritjen tumorale. Zgjidhja stacionare është shumë e dobishme në mjekësi për diagnozimin dhe përcaktimin e terapive klinike për shumë sëmundje kanceroze, [6, 7, 8, 10, 13, 19, 31, 32, etj.]

Në vazhdim të studimit shqyrtohet problemi stokastik i Boussinesq në zonat e ngopura të tokës. Rrjedhja e ujit në mjediset e ngopura të tokës përshkruhet dhe modelohet nga ekuacioni dydimensional i Boussinesq. Një pjesë e punimit i kushtohet studimit të problemit stokastik të Boussinesq në prani të rastësisë në përcjellshmërinë hidraulike, porozitetin e kullueshëm, ringarkimin, avullimin, kushtin fillestar dhe atë kufitar. Problemi është shqyrtuar në hapësirat Sobolev dhe metoda e zgjidhjes së tij është e tipit Galerkin.

Duke u bazuar në disa supozime të arsyeshme, vërtetohen ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjes së problemit stokastik linear të Boussinesq, si dhe korrektësia e shtrimit të problemit që konsiston në vërtetimin e vazhdueshmërisë së zgjidhjes së tij nga të dhënat fillestare, të supozuara këto të vazhdueshme.

Me tej studjohet një model i cili përbën një ekuacion diferencial stokastik me derivate të pjesshme në hapësirën tre dimensionale, me një term zhurmë. Një model stokastik konkret është zhvilluar për të përshkruar rritjen e një tumori për regjimin e qelizave të shpërndara (pa formuar akoma një masë tumorale).

Karakteristika kryesore e këtij modeli është se ai merr parasysh sjelljen e pavarur të qelizave të tumorit, si dhe bashkëveprimet e rastësishme ndërmjet qelizave tumorale, qelizave të sistemit imunitar dhe ilaçeve antikanceroze. Vërtetohet uniciteti i zgjidhjes dhe një rezultat për konvergjencën e saj. Sugjerohen disa zbatime biomjekësore të rezultateve matematike të përftuara.

Kapitulli 1

Ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjeve stacionare të ekuacioneve jolineare të rastit të reaksion difuzionit në hapësirat Banah.

Në këtë kapitull do të studjohen ekuacionet jolineare të rastit të reaksion difuzionit. Këto ekuacione përbëjnë një klasë të rëndësishme në teorinë e ekuacioneve me derivate të pjesshme të rastit. Së pari janë të rëndësishme për vetë matematikën që gjenerojnë. Së dyti për zbatimet e tyre dhe lidhjet me disa fusha: fizikën, kiminë, biologjinë, mjekësinë, atronominë dhe shkencat ekonomike. Kanë pasur dhe do të vazhdojnë të kenë një ndikim të madh në këto fusha.

Për të qënë më specifikë do të konsiderojmë një ekuacion të reaksion difuzion të rastit me polinome jolineare në hapësirën Banah. Sigurisht mund të shqyrtohen modele më të përgjithshme, për shembull, ekuacionet e rastit Lotka - Volterra, ekuacionet e rastit Boussinesq - Glover, ekuacionet e rastit të mbi-rrjedhshmerisë, ekuacionet e rastit Belousov-Zhabotinsky me zbatime në kiminë dinamike, etj.

Le të jetë $(\Omega, \mathrm{F}, (\mathrm{F_t})_{\mathrm{t}\geq 0}, P)$ një bazë stokastike dhe le të jetë

$$w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots \dots, w_m(t))$$

Një proces standart m-dimensional Wiener *i* përcaktuar në $(\Omega, \mathrm{F}, (\mathrm{F_t})_{\mathrm{t}\geq 0}, P)$. Për këtë bazë stokastike le të jetë $\widehat{\xi(t)}$ një zgjidhje stacionare e ekuacionit Ito në R^k

$$d\xi(t) = a\xi(t)dt + b\xi(t)dw(t), \qquad t \geq 0, \tag{1.1}$$

kur $\mathrm{a}(\cdot)$ dhe $\mathrm{b}(\cdot)$ kënaqin kushtet e përmendura më sipër. Studjohet procesi $(\Omega, \mathrm{F}, (\mathrm{F_t})_{\mathrm{t}\geq 0}, P, (\xi(\mathrm{t}))_{\mathrm{t}\geq 0})$ si një model me zhurmë reale, e cila nuk ndryshon me kalimin e kohës, pra nuk është në varësi të kohës. Pranohet se procesi i zhurmës reale është i dhënë me ekuacionin (1.1) dhe shqyrtohet ekuacioni jolinear i rastit në hapësirat e Hilbertit:

$$\frac{du(t,\omega)}{dt} + A\left(\hat{\xi}(t,\omega), u(t,\omega)\right) = f\left(\hat{\xi}(t,\omega)\right), \quad t \geq 0, \ \omega \in \Omega, \tag{1.2}$$

Në rastin kur $\{A(\xi,\cdot), \xi \in R^k\}$ është një familje operatorësh monotonë në një treshe Gelfand $V \subset H \subset V'$, dhe f është një funksion i R^k tek V', studimi ynë ka për qëllim që të vërtetojë ekzistencën një zgjidhjeje stacionare të ekuacionit (1.2). Vihet re se ky ekuacion nuk ka në përmbajtje të tij ekuacione diferenciale Ito.

Në vitet e fundit, [5, 9, 21, 22, 23, etj.] ka patur shumë publikime mbi masat invariante dhe zgjidhjet stacionare për ekuacionet e tipit Ito në hapësirat e Hilbertit. Në këto studime rasti i zhurmës reale nuk trajtohet. Në krahasim me literaturën ekzistuese, që ne kemi studjuar dhe përdorur, përmendim dy aspekte origjinale të studimit tonë.

Së pari, ne konsiderojmë zhurmën reale $\hat{\xi}(t)$ si një proces të caktuar Markov, që nuk ndryshon me kalimin e kohës. Në përputhje me këtë proces ξ (t), gjejmë një zgjidhje të ekuacionit (1.2). Ky fakt motivon disa detaje teknike të analizës së mëposhtme, si p.sh. zgjedhja e një baze të veçantë stokastike. Këto përbëjnë rezultate të reja në lidhje me literaturën e publikuar me ekuacionet e Ito.

Së dyti, nuk do të supozojmë ndonjë kompaktësi, pra do të konsiderojmë vetëm rastet kur kompaktësia nuk ekziston. Nga përvoja jonë e studimit, të gjitha metodat e njohura në literaturë, për të provuar ekzistencën e masave invariante ose zgjidhjeve stacionare, përdorin lloje të ndryshme kompaktësish, që burojnë nga topologjitë e hapësirave funksionale të përfshira. Dihet se struktura e monotonisë lejon të provohet ekzistenca e zgjidhjeve pa ndonjë supozim të kompaktësisë. Sidoqoftë, nuk ka rezultate të ngjajshme për ekzistencën e masave invariante dhe zgjidhjeve stacionare, pa supozuar apo përdorur argumente të kompaktësisë.

Në fund të këtij punimi paraqiten disa zbatime të cilat motivojnë analizën tonë.

Kuptime fillestare

1.1 Ekuacioni i zhurmës

Shënojmë me $L(R^m, R^k)$ hapësirën e operatorëve lineare të R^m në R^k dhe me $|\cdot|_{L_2(R^m,R^k)}$ normën e operatorëve lineare Hilbert-Schimdt të R^m në R^k.

Supozohen kushtet e mëposhtme:

(a.1) Format $a(\cdot): R^m \to R^k$ dhe $b(\cdot): R^k \to L(R^m, R^k)$ janë të vazhdueshme në kuptimin Lipchitz dhe egzistojnë konstantet $\eta\ dhe\ \rho$, për të cilat kënaqet mosbarazimi

$$2\langle a(x), x\rangle_{R^k} + b(x)^2_{L^2(R^m,R^k)} \le -\eta|x|^2_{R^k} + \rho, \quad \forall x \in R^k$$

(a.2) $\eta > 0$ (konstantja η në mosbarazimin e mësipërm është pozitive),

Shqyrtojmë ekuacionin diferencial stokastik

$$d\xi(t) = a\big(\xi(t)\big)dt + b\big(\xi(t)\big)dw(t), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

me kusht fillestar

$$\xi(0) = \xi_0 \tag{1.4}$$

Vërtetohen pohimet e mëposhtme :

(i) Nën supozimin (a.1), për çdo $p \geq 2$ dhe për çdo $\xi_0 \in L^p(\Omega, \mathrm{F}_0, P, R^k)$, problemi (1.3)-(1.4) ka një zgjidhje të vetme, të matshme në mënyrë progresive $\xi(t)$, të përcaktuar për $t \geq 0$ me $\xi(t) \in L^p(\Omega, \mathrm{C}[0,\mathrm{T}], R^k))$, për çdo T>0

Kjo zgjidhje është një proces Markov me vetinë Feller

(ii) Në qoftë se përveç kësaj, (a.2) është i vërtetë, atëherë ekziston një masë probabilitare m_0 për ekuacionin (1.3).

Këto rezultate gjenden tek [9] dhe [14]. Ne do të ndjekim hapat bazë të vërtetimit për qëllime instruktive dhe referimi të mëtejshëm.

Le të fillojmë me (i). Pranimet e koeficientëve Lipschitz sjellin ekzistencën dhe unicitetin e zgjidhjes maksimale. Zgjidhja është globale, dhe kënaq kushtin $\xi(t) \in L^p(\Omega, \mathrm{C}[0,\mathrm{T}], R^k))$.

Nga formula Ito dhe a.1), kemi:

$$d|\xi(t)|_{R^k}^p \leq \Big(2\langle a\big(\xi(t)\big), \xi(t)\rangle_{R^k} + \big|b\big(\xi(t)\big)\big|_{L^2(\mathrm{R}^m, R^k)}^2\Big) \cdot |\xi(t)|_{R^k}^{p-2} \cdot dt$$

$$+2|\xi(t)|_{R^k}^{p-2} \cdot \langle b\big(\xi(t)\big)dw(t), \xi(t)\rangle_{R^k} \leq -\eta|\xi(t)|_{R^k}^p \cdot dt + \rho \cdot |\xi(t)|_{R^k}^{p-2} \cdot dt$$

$$+2|\xi(t)|_{R^k}^{p-2} \cdot \langle b\big(\xi(t)\big)dw(t), \xi(t)\rangle_{R^k} \leq -\eta|\xi(t)|_{R^k}^p \cdot dt + C_0(p)dt$$

$$+2|\xi(t)|_{R^k}^{p-2} \cdot \langle b\big(\xi(t)\big)dw(t), \xi(t)\rangle_{R^k},$$

me konstatnte $C_0(p)$ që nxirret nga mosbarazimi Young.

Supozohet se $\xi_0 \in L^p(\Omega, \mathrm{F}_0, P, R^k)$.

Rezulton se

$$E|\xi(t)|_{R^k}^p \leq e^{\frac{-\eta t}{2}} \cdot E|\xi_0|_{R^k}^p + \int_0^t e^{\frac{-\eta(t-s)}{2}} C_0(p) \cdot ds, \qquad t \geq 0 \tag{1.5}$$

Në fakt, duke qenë se kemi të bëjmë me një zgjidhje lokale të përcaktuar apriori në një interval kohor të rastit, duhet të bëjmë herë pas here, (e thënë ndryshe çdo herë pas një numri fiks hapash), një vlerësim për pritjen e supremmumit në kohë të $|\xi(t)|_{R^k}^p$, ky i fundit duke përdorur mosbarazimet klasike martingale. Detajet mund të gjenden në [9]. Këto vlerësime apriori japin ekzistencën globale të zgjidhjes dhe integrueshmërinë e saj. Karakteristikat për proceset Markov dhe Feller janë klasike.

Vertetësia e (ii) gjithashtu vijon nga (1.5), nën supozimin (a.2). Në të vërtetë, në qoftë se zgjedhim $\xi_0 = 0$, atëherë (1.5) dhe (a.2) sjellin që për çdo p≥ 2 ekziston një konstante $C(p) > 0$, e tillë që

$$|\xi(t)|_{R^k}^p \leq C(p), \quad \forall t \geq 0 \tag{1.6}$$

Kjo nënkupton ekzistencën e një mase invariante m_0, me metodën standarde Bogoliubov - Krylov, për çdo p≥ 2,

$$\int_{R^k} |x|^p \cdot dm_0(x) \leq C(p) \tag{1.7}$$

Kjo verteton (ii).

Janë studjuar vetitë e masave invariante për ekuacionin (1.3). Për shembull, ka vënd vetia e mëposhtme:

Në qoftë se matrica $b(\xi)b^*(\xi)$ është pozitivisht e përcaktuar në mënyrë uniforme për $\xi \in R^k$, atëherë masa invariante është e vetme.

1.2. Ekuacioni evolucionar i rastit me operatorë monotonë

1.2.1 Pranimet

Le të jetë H një hapësirë separable reale dhe $V \subset H$ është një hapësirë refleksive separable Banah (norma $|\cdot|, \|\cdot\|$ respektive, produkti skalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ në H, V kompakte në H, dhe $V \subset\to H$. Le të jenë H' dhe V' hapësirat duale të tyre. Identifikojmë H me dualin H', dhe H'me një nënhapësirë të V'. Mund të shkruajmë

$V \subset H \subset V'$. Shkruajmë gjithashtu çiftimin e dyfishtë midis V′ dhe V me $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pasi kufizimi i tij në $V \times H$ përkon me produktin e brendshëm të H. Pasi kemi përcaktuar këto supozime dhe dualet e secilës hapesirë, bëhen pranimet e mëposhtme:

Le të jetë $\{A(\xi,\cdot), \xi \in R^k\}$ një familje e operatorëve lineare nga V' e cila kënaq supozimet e mëposhtme :

(A.1) për çdo $u \in V$, $\xi \to A(\xi, u)$ është fortësisht e matshme nga R^k tek V'.

(A.2) për çdo $\xi \in R^k$ $u, v, z \in V$, funksioni

$$s \to \langle A(\xi, v + sz), u\rangle$$

është i vazhdueshëm në R.

(A.3) Ekziston një konstante $\lambda_0 \in R$ e tillë që për çdo $\in R^k$, $u, v \in V$

$$2\langle A(\xi, u) - A(\xi, v), u - v\rangle + \lambda_0 |u - v|^2 \geq 0,$$

(A.4) Ekziston një funksion $\rho: R^k \to [0, \infty)$ dhe konstantet $p \geq 2$, $\lambda \in R$, $\alpha > 0$, $r \geq 0, C_\rho > 0$, të tilla që për çdo $\xi \in R^k$, $u \in V$,

$$2\langle A(\xi, u), u\rangle + \lambda |u|^2 \rho(\xi) \geq \alpha \|u\|^p, \text{ dhe } \quad \rho(\xi) \leq C_\rho (1 + |\xi|_{R^k}^r)$$

(A.5) Me P si më lart, ekziston konstantja $C_A > 0$, e tillë që për çdo $\xi \in R^k$, $u \in V$,

$$\|A(\xi, u)\|_{V'} \leq C_A (1 + \|u\|^{p-1})$$

Përfundimisht, le të jetë $f = f(\xi): R^k \to V'$ një funksion i dhënë i cili është fortësisht i matshëm që kënaq supozimet **(f.1):** Ekziston konstantia $C_f > 0$, e tillë që për të gjitha $\xi \in R^k$:

(f1) $$\|f(\xi)\|_{V'}^{p'} \leq C_f (1 + |\xi|_{R^k}^r)$$

kur p' është eksponenti i konjuguar i p (d.m.th $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$)

Verejtje 1.1. Në disa raste është e natyrshme të supozohet se proceset e zhurmës që hyjnë në A dhe f janë të ndryshme; por kjo mund të arrihet vetëm duke e konsideruar si $\xi(t)$ procesin e zhurmës së përbashkët.

Le të jetë $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ hapësirë probabilitare e plotë, e cila jepet me një proces standard m-dimensional w(t).

$$w(t) = \big(w_1(t), w_2(t), \dots\dots, w_m(t)\big), \qquad t \geq 0,$$

nënsupozimin (a.1) jepet $\xi_0 \in L^r(\Omega, \mathrm{F}_0, P, R^k)$. Le të jetë $\xi = \xi(t,\omega)$ një zgjidhje koresponduese të problemit (3) - (4). Atëherë r është e njëjtë me kushtet (A.4).
Shqyrtohet ekuacioni evolucionar i rastit si më poshtë:

$$\frac{du(t,\omega)}{dt} + A(\xi(t,\omega), \quad \mathrm{u}(t,\omega)) = f\big(\xi(t,\omega)\big), t \geq 0, \ \omega \in \Omega, \tag{1.8}$$

me kusht fillestar

$$u(0,\omega) = u_0(w), \qquad \omega \in \Omega \tag{1.9}$$

Supozohet se

$$u_0 \in L^2(\Omega, \mathrm{F}_0, P, H) \tag{1.10}$$

Problemi (1.8) –(1.10) interpretohet në kuptimin e zgjidhjes së dobët:

$$\langle u(t,\omega), \phi\rangle + \int_0^1 \langle A\big(\xi(s,\omega), \mathrm{u}(s,\omega)\big), \phi\rangle \cdot ds = \langle u_0(\omega), \phi\rangle + \int_0^1 \langle f\big(\xi(s,\omega)\big), \phi\rangle \cdot ds,$$
$$\forall t \geq 0, \forall \phi \in V \tag{1.11}$$

Nga zgjidhja e ekuacioneve (1.8) – (1.9), kemi të bëjmë me një proces progresivisht të matshëm $u = u(t,\omega)$, për $t \geq 0$.
Kemi faktin e mëposhtëm:

(iii) Nën supozimin (a.1) të paragrafit 2.1, jepet $\xi_0 \in L^p(\Omega, \mathrm{F}_0, P, R^k))$, jepet zgjidhja koresponduese $\xi(t,\omega)$ e ekuacioneve (1.3) – (1.4), dhe nën supozimet (A.1) – (A.5), (f.1), ekziston një zgjidhje e vetme e problemit (1.8) – (1.9).

Duke zbatuar metodën Galerkin, për çdo $\omega \in \Omega$, gjendet zgjidhja e vetme $u(t,\omega)$ e ekuacionit (1.11), shiko [12]

1.2.2 Një vlerësim paraprak

Le të jetë $A_n(\xi,\cdot)$ një operator në H_n. Përkufizohet

$$A_n(\xi,u) = P_n\big(A_n(\xi,u)\big), \quad u \in H_n, \ \ \xi \in R^k$$

dhe le të jetë

$$f_n(\xi) = P_n\big(f_n(\xi)\big), \quad \xi \in R^k$$

Atëherë, le të jetë $\{u_{0n}\}_{n\in N}$ kushti fillestar, $\forall n,$

$$u_{0n} \in L^2(\Omega, \mathrm{F}_0, P, H_n) \text{ dhe}$$

$$u_{0n} \to u_0 \text{ në } H.$$

Jepet

$$\xi_0 \in L^r(\Omega, \mathrm{F}_0, P, R^k) \tag{1.13}$$

Le të konsiderojmë një zgjidhje Galerkin për ekuacionin (1.8) të shoqëruar me ekuacionin (1.3):

$$\frac{du_n(t,\omega)}{dt} + A_n\big(\xi(t,\omega), u_n(t,\omega)\big) = f_n\big(\xi(t,\omega)\big), t \geq 0, \ \ \omega \in \Omega \tag{1.14}$$

$$d\xi(t) = a\big(\xi(t)\big)dt + b\big(\xi(t)\big)dw(t)\,, \quad t \geq 0 \tag{1.15}$$

me kushte fillestare

$$u_n(0,\omega) = u_{0n}(w), \quad \xi(0,\omega) = \xi_0(\omega) \tag{1.16}$$

Le të jetë $\beta > 0$ që kënaq inekuacionin e mëposhtëm:

$$|v|^2 \leq \beta \|v\|^2, \quad \forall v \in V$$

Lemma 1.1 Shqyrtohet sistemi (1.14)-(1.15)-(1.16) nën hipotezat (a.1), (A.1)-(A.5), (f.1), (1.13) dhe ekziston një konstante C$>$ 0, që varet nga n, e tillë që

$$E(|u_{0n}|^2) \leq C, \forall n \in N \tag{1.17}$$

Atëherë kemi këto përfundime

(i) Sistemi (1.14)-(1.15)-(1.16) ka një zgjidhje të vetme në $H_n \times R^k$.

(ii) Për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një konstante $C(\varepsilon) > 0$ e tillë që

$$|u_n(t,\omega)|^2 \leq e^{\gamma t}|u_{0n}(\omega)|^2 +$$

$$+ \int_0^1 e^{\gamma(t-s)} \cdot [a - \varepsilon + (C_f C(\varepsilon) + C_\rho)(1 + |\xi(s)|^r_{R^k})] \cdot ds \tag{1.18}$$

për të gjitha $n \in N\,, t > 0\,,\ P - a.e.\omega \in \Omega$

ku $\overbrace{\gamma = \lambda}^{d} - \frac{\alpha-\varepsilon}{\beta}$.

(iii) për çdo T> 0 ekzistojnë konstantet $C_1(T), \dots.., C_4(T)$, të tilla që plotësojnë këto kushte

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} |u_n(t,\omega)|^2\right) \leq C_1(T), \quad \forall n \in N \tag{1.19}$$

$$E\int_0^T \|u_n(t,\omega)\|^P dt \leq C_2(T)\,, \quad \forall n \in N \tag{1.20}$$

$$E\int_0^T \|A_n(\xi_n(t,\omega), u_n(t,\omega)\|_{V'}{}^P dt \leq C_3(T), \quad \forall n \in N \tag{1.21}$$

$$E\int_0^T \|u'_n(t,\omega)\|_{V'}{}^P dt \leq C_4(T), \quad \forall n \in N \tag{1.22}$$

Vërtetim

Pjesa e parë (i).

Në fillim, ekuacioni (1.15) është konsideruar i pavarur, me kushte fillestare ξ_0, dhe me zgjidhje të vetme të vazhdueshme dhe progresivisht të matshme**,** $\xi(t)$. Atëherë, mund të marrim $\omega \in \Omega$ (P-a.s), dhe kjo vlerë zbatohet për ekuacionin (1.14) me kushte fillestare u_{0n} (ky i fundit tashmë është një problem determinist). Rezultatet e [1] japin një zgjidhje të vetme

$$u_n(t,\omega) \in C([0,T], H_n).$$

Matshmëria progresive e $u_n(t,\omega)$ deduktohet lehtësisht nga ndërtimi i $u_n(t,\omega)$ si një limit i përafrimeve të tipit Peano të matshëm në mënyrë progresive. Vërtetimet e vetive Markov dhe Feller janë klasike.

Pjesa e dytë (ii).

Nga ekuacioni (1.14) kemi

$$\frac{d|u_n(t)|^2}{dt} + 2\langle A_n\big(\xi(t), u_n(t)\big), u_n(t)\rangle = 2\langle f_n\big(\xi(t)\big), u_n(t)\rangle \tag{1.23}$$

Atëherë, nga supozimet kemi këtë përfundim

$$\frac{d|u_n(t)|^2}{dt} + \alpha\|u_n(t)\|^p \leq \lambda|u_n(t)|^2 + \rho\big(\xi(t)\big) + 2\big\|f_n\big(\xi(t)\big)\big\|_{V'} \cdot \|u_n(t)\|$$

Përdorim gjithashtu supozimin (f.1), për çdo $\varepsilon > 0$ dhe kemi :

$$\frac{d|u_n(t)|^2}{dt} + (\alpha - \varepsilon)\|u_n(t)\|^p$$

$$\leq \lambda|u_n(t)|^2 + C(\varepsilon)\big\|f_n\big(\xi(t)\big)\big\|^{P'}{}_{V'} \cdot \|u_n(t)\| + \rho\big(\xi(t)\big)$$

$$\leq \lambda|u_n(t)|^2 + \big(C_f C(\varepsilon) + C_\rho\big)\big(1 + |\xi(s)|^r_{R^k}\big) \qquad (1.24)$$

Atëherë, $C(\varepsilon) = \frac{1}{P' \varepsilon^{\frac{p}{p'}}}$ nxirret nga mosbarazimi i Young. Rimarim përkufizimin β, supozojmë p≥ 2, dhe përdorim faktin qe $x^p \geq x^2 - 1$ për $x \geq 0$, kemi:

$$\frac{d|u_n(t)|^2}{dt} \leq \left(\lambda - \frac{\alpha-\varepsilon}{\beta}\right)|u_n(t)|^2 + \alpha - \varepsilon + \big(C_f C(\varepsilon) + C_\rho\big) \cdot \big(1 + |\xi(s)|^r_{R^k}\big) \qquad (1.25)$$

Inekuacioni (1.18) pasohet tani nga lema e Growell.

Pjesa e tretë (iii).

Jepet $T > 0$, shënojmë me $C_0(T)$ vlerën më të madhe të $e^{\gamma t}$ mbi $[0, T]$. Nga (1.18) kemi:

$$|u_n(t,\omega)|^2 \leq C_0(T)|u_{0n}(w)|^2 + \int_0^T C_0(T)\big[\alpha - \varepsilon + \big(C_f C(\varepsilon) + C_\rho\big) \cdot \big(1 + |\xi(s)|^r_{R^k}\big)\big] \cdot ds, \quad \forall t \in [0, T] \qquad (1.26)$$

Rimarim (1.5), mbetja jep (1.19)

Kthehemi mbrapa tek inekuacioni (1.24), dhe integrojmë nga $[0, T]$ me $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$

Kemi

$$E\int_0^T \|u_n(t)\|^P dt$$

$$\leq E(|u_{0n}|^2) + E\int_0^T [\lambda|u_n(t)|^2 + C_f \cdot C\left(\frac{\alpha}{2}\right) + C_p) \cdot \big(1 + |\xi(s)|^r_{R^k}\big)]dt$$

Nga (1.17), (1.19), dhe (1.5), nxirret (1.20).

Nga (1.20) dhe supozimi (A.5) nxirret (1.22). Vërtetimi është i kompletuar .

1.3. Ekzistenca e zgjidhjeve stacionare

1.3.1 Përkufizimi i zgjidhjeve stacionare

Prezantojmë tani bazën stokastike të domosdoshme për vazhdim. Le të zgjedhim një masë invariante m_0 për ekuacionin (1.3) me momente të fundme të çdo rendi, ose të paktën me moment të fundëm të rendit r, me r të dhënë nga supozimi (A.4). Kemi treguar në paragrafin më sipër se një masë e tillë ekziston. Le të jetë $(\Omega^0, F^0, (F_t^0)_{t\geq 0}, P^0)$ bazë stokastike e thjeshtë që mbështet (ka suport) procesin stardard m- dimensional Wiener $w(t)$. Le të jenë

$$\Omega = R^k \times [0,1] \times \Omega^0, \quad F = B(R^k) \otimes B(0,1) \otimes F^0,$$

$$\mathrm{F_t} = B(R^k) \otimes B(0,1) \otimes F_t^0 \quad , \quad P = m_0 \otimes \lambda \otimes P^0 \tag{1.27}$$

ku B tregon $\sigma -$algjebrën Borel, dhe λ është e matshme sipas Lebesgue në [0,1]. Konsiderojmë w(t) si një lëvizje Broviane mbi bazën e re stokastike $(\Omega, F, (F_t)_{t\geq 0}, P)$. Me fjalë të tjera,

$$\widehat{w}(t, x, y, \omega^0) = w(t, \omega^0), \quad x \in R^k \quad , \quad y \in [0,1], \quad \omega^0 \in \Omega^0$$

Le të jetë $\widehat{\xi_0} : \Omega \to R^k$ e përkufizuar si

$$\widehat{\xi_0}(x, y, \omega^0) = x, \quad x \in R^k \quad , \ y \in [0,1], \quad \omega^0 \in \Omega^0 \tag{1.28}$$

Atëherë, ligji i $\widehat{\xi_0}$ eshtë $\mathrm{m_0}$. Me supozimin e momentit të r-të të $\mathrm{m_0}$, kemi $\widehat{\xi_0} \in \mathrm{L^r}(\Omega, \mathrm{F_0}, \mathrm{P}, \mathrm{R^k})$. Meqenëse $\mathrm{m_0}$ është një masë invariante, dhe ekuacioni (1.3) përcakton një proces Markov, zgjidhja $\hat{\xi}(\mathrm{t})$ e ekuacionit (1.3) me kushtin fillestar $\widehat{\xi_0}$ është një proces stacionar. Kemi përdorur komponentin $\mathrm{R^k}$ të bazës stokastike për të ndërtuar $\widehat{\xi_0}$ dhe zgjidhjen $\hat{\xi}(\mathrm{t})$. Komponenti [0,1] i bazës stokastike do të përdoret për të ndërtuar kushte fillestare të përshtatshme për përafrimet e Galerkin të ekuacionit monoton (ekuacioni me operatorin monoton). Duke pasur parasysh bazën stokastike dhe procesin stacionar w(t, ω) të përcaktuar, themi se një proces stokastik $\hat{\xi}(t)$) është një zgjidhje e problemit (1.8) - (1.9), në kuptimin e nënparagrafit të mëparshëm, në lidhje me disa kushte fillestare u_0, shiko (1.10), dhe përveç kësaj u është një proces stacionar në H. Kjo do të thotë se për çdo $n \in N$, $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ dhe $h > 0$, ligji i përbashkët i shpërndarjes së probabiliteteve i

$$(u(t_1 + h), u(t_2 + h), \dots, u(t_n + h) \in H^n$$

është i pavarur nga h.

Vërejtje 1.2. Përkufizimi i dhënë më lart korrespondon me pikëpamjen se zhurma është një proces i caktuar. Pra, në një kuptim, kërkojmë një formë të zgjidhjeve të forta, në vend të zgjidhjeve të dobëta. Sidoqoftë, zgjedhim një bazë të përshtatshme stokastike që nga fillimi, në mënyrë që t'i përgjigjrt zgjidhjes së dobët dhe të fortë, shiko [5], [9].

Një version më i fortë do të kërkonte që procesi i përbashkët $(\hat{\xi}(t), u(t))$ të jetë invariant në $R^k \times H$. Në fakt, kjo është forma e stacionaritetit që do të vërtetojmë.

1.3.2 Rezultati kryesor

Sjellin ndërmend përkufizimin e β të bërë pak më lart

Teorema 1.1

Supozohet se kënaqen kushtet (a.1) dhe (a.2) të formuluara më lart. Në bazën stokastike (1.27) shqyrtohet madhësia e rastiti $\widehat{\xi_0}$ e përkufizuar nga (1.28) dhe zgjidhja e stacionare shoqëruese $\hat{\xi}(t)$ e ekuacionit (1.3).

Supozohet se kënaqen (A.1)-(A.5) dhe (f.1) dhe se $\lambda < \frac{\alpha}{\beta}$. Vërtetohet se ekuacioni (1.8) me kushtin fillestar (1.9), i cili kënaq (1.10), ka një zgjidhje stacionare.

Vërtetim

Hapi 1.

Për çdo numër të dhënë natyror n, shqyrtohet sistemi (1.14) - (1.15) - (1.16) në bazën stokastike (1.27).

Në (1.16) zgjedhim si ndryshore ξ_0, variablin e rastësishëm $\widehat{\xi_0}$ të përcaktuar nga (1.28) dhe $u_{0n} = 0$ për të gjitha n-të.

Në përputhje me këto kushte fillestare, $(u_n(t), \widehat{\xi}(t))$ është zgjidhja e (1.14) - (1.15). Shënojmë me u_t^n ligjin e $(u_n(t), \hat{\xi}(t))$ në $H \times R^k$ dhe me ρ_1^n ligjin mbi $H \times R^k$ të

Përcaktuar nga

$$\rho_1^n = \frac{1}{t}\int_0^t \mu_s^n \, ds$$

Të dyja, μ_t^n dhe ρ_1^n kanë m_0 mbi R^k. Familja $\{\mu_t^n, \ t \geq 0\}$ është e ngjeshur. Për ta vërtetuar këtë, tek (1.18) marrim $\varepsilon > 0$ aq të vogël sa që $\gamma < 0$. Rezultati do të jetë: $E\left|\hat{\xi}(s)\right|_{R^k}^r$ është konstante.

Prandaj:

$$\sup_{t>0} E \int_0^t e^{\gamma(t-s)\cdot(1+\left|\hat{\xi}(s)\right|_{R^k}^r)} \cdot ds < \infty$$

Nga (1.18) gjendet

$$E|u_n(t)|^2 \leq C_1, \ \forall n \in N \ , \ \forall t \geq 0 \qquad (1.29)$$

për një konstante $C_1 > 0$ të pavarur nga n dhe t. (1.29), së bashku me lidhësinë e njëtrajtshme për $E\left|\hat{\xi}(s)\right|_{R^k}^r$, nënkuptojnë nga mosbarazimi Chebishev se familja e masave $\{\mu_t^n \ , t \geq 0\}$ është e ngjeshur. Në fakt, familja $\{\mu_t^n, \ t \geq 0, n \in N\}$ është e ngjeshur, por nuk është e lehtë të përdorësh këtë informacion shtesë për një vërtetim më të drejtpërdrejtë të Teoremës.

Meqenëse kemi vërtetuar se familja $\{\mu_t^n, \ t \geq 0\}$ është e ngjeshur, familja $\{\rho_t^n \ , t \geq 0\}$ është gjithashtu e ngjeshur. Nga teorema Prohorov, e zbatuar për çdo n të dhënë, ekziston një masë probabilitare μ^n në $H \times R^k$ që është limit i dobët i disa vargjeve $\{\rho_{tj}^n\}_{j\in N}$. Tani jemi më të qartë që μ^n ka marxhinal m_0 në R^k.

Me anë të një argumenti klasik (shiko [1]) dhe bazuar në vetitë e Markovit dhe të Feller-it për sistemin (1.13), (1.14) mund të vërtetojmë se μ^n është një masë invariante për këtë sistem. Zbatohet metoda Krylov-Bogoliubov, përveç theksohet se të gjitha masat μ^n kanë të njëjtin m_0.

Më në fund, vërejmë se ekziston një C_2 konstante e pavarur nga n, e tillë që

$$\int_{H\times R^k}(|h|^2 + |x|^2)d\mu^n((h,x) \leq C_2 \ , \quad \forall n \in N \qquad (1.30)$$

Tani mbetet të vërtetohet se ekziston një varg $\{\theta_i(h,x)\}_{i\in N}$ i funksioneve të vazhdueshëm $(h,x) \in H \times R^k$, i cili konvergjon për $i \to \infty$, nga poshtë, në funksionin

$(h,x) \to |h|^2 + |x|^2$ i përcaktuar në $H \times R^k$

Kemi

$$\int_{H\times R^k} \theta_i(h,x)d\mu^n\big((h,x)\big) = \lim_{j\to\infty} \theta_i(h,x)d\rho_{tj}^n\big((h,x)\big) = \frac{1}{t}\int_0^1 E(|u_n(s)|^2)ds$$

$$+ E(\left|\hat{\xi}(s)\right|_{R^k}^2) \le C_2$$

Për një konstante C_2 të pavarur nga n dhe j.

Duke përmbledhur, vërtetohet se ekziston një masë invariante probabilitare μ^n për sistemin (1.14) - (1.15), me margjinal m_0 në R^k, që kënaq mosbarazimin (1.30).

Hapi 2. Zgjidhja stacionare për sistemin përafrues, të përafërt.

Përsëri, shqyrtohet sistemi (1.14) - (1.15) për çdo n të dhënë. Mbi bazën stokastike (1.27) (në fakt, mjafton të përdoret përbërësi $R^k \times [0,1]$ i bazës), për secilën n ekziston një ndryshore e rastit e matshme, e llogaritshme F_0, $\hat{u}_{0,n}$ e tillë që $(\widehat{\xi_0}, \hat{u}_{0,n})$ ka ligj të përbashkët μ^n. Nën supozimet e teoremës marrim $\mu = \mu^n$. Pastaj, supozimet zbatohen për ndryshoret e rastit ψ dhe ϕ, dhe shënojmë ψ me $\hat{u}_{0,n}$ dhe $\phi = (\widehat{\xi_0}, \hat{u}_{0,n})$.

Nga vetia Markov, kujtojmë se zgjidhja $\left(\hat{\xi}(t), \hat{u}_n(t)\right)$ e sistemit (1.14) - (1.15) që korrespondon me kushtin fillestar $(\widehat{\xi_0}, \hat{u}_{0,n})$ është një proces stacionar në $R^k \times H$.

Më në fund nxirret se kemi

$$E\left(\left|\hat{u}_{0,n}\right|^2\right) \le E(|\hat{u}_0|^2) \le C_2\,, \quad \forall n \in N \tag{1.31}$$

Hapi 3. Procedura e kalimit në limit

Le të studiojmë tani konvergjencën e $\hat{u}_n(t)$, *për* $n \to \infty$ dhe $t \in [0, T]$. Le të zbatojmë pjesen (iii) të Lemës 1.1 me kushtet fillestare $(\widehat{\xi_0}, \hat{u}_{0,n})$ të gjetura në hapin e mëparshëm. Ne mund të zbatojmë Lemën 1.1 sepse (1.31) është e vlefshme për këtë rast. Kështu, mosbarazimet (1.19) - (1.22) qëndrojnë të vërteta për $\hat{u}_n(t)$). Prandaj, ekziston një zgjerim $\hat{u}_{n_k}(t)$, tashmë i shënuar nga $\hat{u}_n(t)$, për thjeshtësi të shkruari, i tillë që

$$\hat{u}_n(t) \to \hat{u} \text{ , dobët në } L^P(\Omega \times [0,T]; V)$$

$$\hat{u}_n(t) \to \hat{u} \text{ , dobët } L^2(\Omega; L^\infty(0,T;H))$$

$$A_n(\hat{\xi}, \hat{u}_n) \to A_n(\hat{\xi}, \hat{u}) \text{ , dobët në } L^{P'}(\Omega \times [0,T]; V')$$

$$\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = \frac{d\hat{u}(t)}{dt} \text{ , dobët në } L^{P'}(\Omega \times [0,T]; V')$$

$$\hat{u}_n(0) \to u_0 \text{ dobët në } L^2(\Omega; H)$$

$$\hat{u}_n(T) \to \hat{u}(T) \text{ dobët në } L^2(\Omega; H)$$

Përdorimi i kushteve (A.2) - (A.4) dhe argumenti klasik i monotonisë, thjeshtuar me faktin se nuk kemi nevojë për formulën e Ito-s, mundësojnë të vërtetohet se

$$\hat{u} \in L^2(\Omega, C([0,T]; H)) \cap L^P(\Omega \times [0,T]; V)$$

duke përdorur argumente klasike dhe të njohura. Vazhdueshmëria e trajektoreve mund të provohet hap pas hapi si më poshtë dhe duke përdorur teknikën përcaktuese si në [9].

Me anë të një procedure diagonale, ndërtimi i radhës së konvergjencës mund të kryhet në mënyrë të tillë që të jete i përshtatshem mbi secilin interval [0, T], në të njëjtin proces të rastit u. Kështu, zgjidhja u e problemit të rastit (1.8), (1.9) vërtetohet për të gjitha $t \geq 0$.

Për të provuar stacionaritetin e zgjidhjes $\hat{u} = \hat{u}(t, \omega)$ na duhet (1.19) dhe pohimi:

$$\hat{u}_n \to \hat{u}^* \text{ dobët në } L^2(\Omega, L^\infty(0,T;H))$$

Nëse përdoren simbolet

$$P_n = \text{ligji } \hat{u}_n \text{ në } L^2(\Omega, L^\infty(0,T;H))$$

$$P = \text{ligji } \hat{u} \text{ në } L^2(\Omega, L^\infty(0,T;H))$$

atëherë (nga Teorema e Prohorov) ekziston një varg n_k , hapësira $\{P_{n_k}\}$ e vargut P_n, e tillë që $P_{n_k} \to P$ për $k \to \infty$.

Vërtetimi është i plotë.

Le të jenë R^k, [0,1] dhe H të pajisura me σ- algebrën Borel, dhe le të jetë m_0 masa e Lebeg në [0,1]. Propozimi tjetër i përdorur më sipër në Hapin 3 merret duke ndryshuar varablet e rastit nga $R^k \times [0,1]$, tek $R^k \times H$. Supozohet të këtë masën e produktit $m_0 \otimes \lambda$ në $R^k \times [0,1]$. Duke pasur parasysh një masë μ mbi $R^k \times H$ gjithmonë gjendet një ndryshore e rastit:

$$\phi \to R^k \times [0,1] \to R^k \times H$$

e tillë që, $\phi(m_0 \otimes \lambda) = \mu$

1.3.3 Shuma e operatorëve monotonë

Është e leverdishme ose e përshtatshme dhe e dobishme të përgjithësohet Teorema 1.1 në rastin e shumës së fundme të operatorëve monotonë. Për çdo i = 1,2,…, υ supozohet se kemi një hapësirë reale refleksive të ndashme Banah $V_i \subset H$ (norma $\|\cdot\|_{i)}$, në H, me identifikimin e zakonshëm.

$$V_i \subset H \subset V_i'$$

Për më tepër, supozohet të kemi një familje të operatorëve jolinearë nga V_i tek V_i' të shënuar me $A_i(\xi,\cdot), \xi \in R^k$, supozime të përshtatshme (A.1) - (A.5) me konstante λ_0, p_i, λ_i, α_i, r_i, C_ρ, C_{A_i}, mundësisht në varësi të i. Së fundmi, supozohet se kemi funksione lehtësisht të llogaritshme, të matshëm,

$$f_i = f_i(\xi): R^k \to V_i'$$

Të cilat kënaqin kushtin (f.1)

Shqyrtohet ekuacioni evolucionar i rastit:

$$\frac{du(t,\omega)}{dt} + \sum_{i=1}^{m} A_i(\hat{\xi}(t,\omega), u(t,\omega)) = \sum_{i=1}^{\upsilon} f_i\left(\hat{\xi}(t,\omega)\right), \quad t \geq 0, \; \omega \in \Omega \qquad (1.32)$$

ku $\hat{\xi}(t,\omega)$ tregon zgjidhjen e ekuacionit (1.1) të përcaktuar në paragrafin 3.1, mbi bazën stokastike (Ω, F, F_t, P) dhënë nga (1.27). Përkufizimi i zgjidhjes stacionare është i njëjtë me atë të dhënë në pjesen e mësipërme. Le të jetë $\beta_i > 0$ një konstante që plotëson mosbarazimet:

$$|x|^2 \leq \beta_i \|x\|_i^2 \ , \quad \forall x \in V_i, \ \ i = 1,2,\dots,\upsilon$$

Teorema 1.2 Supozohet se :

$$\sum_{i=1}^{\upsilon}(\lambda_i - \frac{\alpha_i}{\beta_i}) < 0$$

Atëherë ekuacioni (1.32) ka një zgjidhje stacionare. Vërtetimi është i njëjtë me atë të teoremës se mësipërme.

1.4. Zbatime të ekuacioneve jo lineare të reaksion – difuzionit me zhurmë të bardhë

Në këtë pjesë të studimit ekuacionet e reaksion – difuzionit që do të shqyrtohen janë me polinome jolineare. Termat shtesë të ekuacioneve do të jenë polinome jolineare. Konkretisht do të merret në shqyrtim ekuacioni i formës

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta u - \sum_{h=0}^{2p-1} a_h(x,\xi)u^k \tag{1.33}$$

$x \in D \subset R^3$, $t \geq 0$, $p \in N$, kur D tregon një zonë të hapur të kufizuar në R^3. Kushtet fillestare dhe ato kufitare janë:

$$u(0,x,\omega) = u_0(x,\omega), \tag{1.34}$$

dhe

$$u(t,x,\omega) = 0\ , \quad x \in \partial D \tag{1.35}$$

Supozohet se koeficenti i difuzionit $c = c(\xi)$ është jonegativ, i kufizuar, i matshëm në ξ, dhe i pavaruar nga x.

Supozohet se funksionet e rastit $a_h(x,\xi)$, janë të matshëm në (x,ξ) dhe se ekzistojnë konstantet reale $c_h < C_h$ dhe konstantet pozitive $c_{2p-1} < C_{2p-1}$ të tilla që

$$c_h \leq a_h(x,\xi) \leq C_h, \ \ për \ \ 1 \leq h \leq 2p-1 \ dhe\ për\ cdo\ (x,\xi) \in D \times R^k$$

Në funksionin e rastit $a_0(x,\xi)$ mund të vihen kushtet:

$x \to a_0(x,\xi)$ është i matshëm në ξ, i përket $H^{-1}(D)$, dhe kënaq kushtet :

$$|a_0(x,\xi)|_{H^{-1}(D)} \leq C(1+|\xi|_{R^k}^r)$$

për vlera pozitive të konstante C dhe r. Supozohet se $u_0(x,\omega)$ kënaq kushtin fillestar (1.10)

Falë supozimeve të mëparshme dhe mosbarazimit Young, ekziston konstantia $\bar{c} > 0$ e tillë që

$$(\sum_{h=0}^{2p-1} a_h(x,\xi)u^h)u \geq \frac{1}{2}C_{2p-1}u^{2p} - \bar{c}$$

Le të jetë $H = L^2(D)$, $V = H_0^1(D)$

$$V' = H^{-1}(D), \quad A(\xi,u) = \sum_{h=0}^{2p-1} a_h(x,\xi)u^h, \quad f(\xi) = -a_0\,(x,\xi) \;,$$

Vëretimet e kushteve (A.1)-(A.5) dhe (f.1) janë klasike. Në rastin konkret ne kemi $\gamma = 0$, $\delta = 0$, $a = 1/2C_{2p-1}$

Kështu, zbatohet Teorema e mësipërme dhe përftojmë këtë teoremë.

Teorema 1.3

Duke respektuar pranimet e mësipërme, problemi jo-linear i rastit i reaksion – difuzionit (1.33), (1.34), (1.35) ka zgjidhje stacionare të vetme.

KAPITULLI 2

Ekzisteca dhe uniciteti i zgjidhjeve për ekuacionet dy-dimensionale stokastike lineare të Boussineq.

2.1 Hyrje

Një rëndësi të vecantë në studimin tonë ka rrjedhja e ujit nëpër një akuifer të pakufizuar të tokës, që mund të modelohet nga ekuacioni Boussinesq. Ky ekuacion nxirret duke zbatuar parimin e ruajtjes së masës, ligjin Darcy dhe hipotezën Dupuit-Forchheimer (Bear, 1972). Ekuacioni dy-dimensional i Boussinesq ka formën:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{k_i}{s}(u+d)\frac{\partial}{\partial x_i}(u+d)\right] + \frac{r-ET}{s}, \tag{2.1}$$

$(x,t) \in D \times (0,T]$,

ku $x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2$ tregon koordinatat hapësinore (ndryshoret), t është koha e ndryshueshme, D tregon një zonë hapësinore të kufizuar me kufij të lëmuar ∂D, $T > 0$ është një konstante.

$$x = (x_1, x_2), \quad |x|^2 = x^2{}_1 + x^2{}_2, \quad dx = dx_1 * dx_2$$

$u = u(x,t)$ paraqet lartësinë e sipërfaqes së lirë mbi shtresën e papërshkueshme, d tregon thellësinë e akuiferit (matur nga shtresa e papërshkueshme), k_i tregon përcjellshmërinë hidraulike të ngopur të tokës, ET tregon evapotranspirimin, r tregon ringarkimin, s tregon porozitetin e kullueshëm.

Ekuacioni i Boussinesq (2.1) shoqërohet me kushtin fillestar:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \tag{2.2}$$

dhe me kushtin kufitar Dirichlet

$$u(x,t) = H(x,t), \quad (x,t) \in \partial D \times (0,\mathrm{T}) \tag{2.3}$$

ku $u_0(x)$ dhe $H(x,t)$ më sipër janë funksione konkrete. Në mënyrë të ngjajshme, ne mund të konsiderojmë kushtin kufitar të Neumann.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial u\,(x)} = H_1(x,t), \quad (x,t) \in \partial D \times (0,T]$$

Ekuacioni i linearizuar i Boussinesq është

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}} [\frac{\mathrm{k_i}}{\mathrm{s}} \mathrm{H_0} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}} (\mathrm{u} + \mathrm{d})] + \frac{\mathrm{r} - \mathrm{ET}}{\mathrm{s}}, \qquad (\mathrm{x}, \mathrm{t}) \in \mathrm{D} \times (0, \mathrm{T}] \tag{2.4}$$

ku H_0 (konstante) tregon thellësinë mesatare të akuiferit.

Në studimin tonë shqyrtohet ekuacioni i linearizuar stokastik Boussinesq:

$$\frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t},\omega)}{\partial \mathrm{t}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}} [\frac{\mathrm{k_i}(\mathrm{x},\mathrm{t},\omega)}{\mathrm{s}(\mathrm{t},\omega)} \mathrm{H_0} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}} (\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t},\omega) + \mathrm{d}(\mathrm{x},\omega)) + \frac{\mathrm{r}(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\omega) - \mathrm{ET}(\mathrm{x},\mathrm{t},\mathrm{u},\omega)}{\mathrm{s}(\mathrm{t},\omega)}$$

$$(x,t,\omega) \in D \times (0,T] \times \Omega \tag{2.5}$$

ku $\Omega = \{\omega\}$ tregon hapësirën probabilitare të zgjedhjes dhe ω tregon ndryshoren e rastit.

Ekuacioni (2.5) shoqërohet me kushtin fillestar

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},0,\omega) = \mathrm{u_0}(\mathrm{x},\omega) \quad , \quad (\mathrm{x},\omega) \in D \times \Omega \tag{2.6}$$

dhe me kushtin kufitar Dirichlet

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t},\omega) = \mathrm{H}(\mathrm{x},\mathrm{t},\omega) \quad , \quad (\mathrm{x},\mathrm{t},\omega) \in \partial D \times (0,T] \times \Omega \tag{2.7}$$

ku $\mathrm{u_0}(\mathrm{x},\omega)$ dhe $\mathrm{H}(\mathrm{x},\mathrm{t},\omega)$ janë përkatësisht funksion i rastit dhe fushë e rastit.

Në mënyrë të ngjashme mund të shqyrtohet kushti kufitar i von Neumann.

Pedologjia Moderne e konsideron tokën si një sistem dinamik kompleks, i cili evoluon nën ndikimin tërësor të ndërveprimeve midis faktorëve natyrorë dhe biologjikë, si dhe veprimtarisë njerëzore. Për shkak se këto ndërveprime janë procese të rastit, është e arsyeshme të supozohet se rrjedhja e ujit në tokë përshkruhet nga një fushë e rastit. Gabimet në matjen e përcjellshmërisë hidraulike, porozitetit të kullueshëm, ringarkimit dhe evapotranspirimit janë arsye të tjera për praninë e rastësisë në procesin e rrjedhës së ujit në tokë. Këto argumente kanë shumë mbështetës midis shkencëtarëve dhe fizikanëve të botës, të cilët vazhdojnë të tregojnë një interes më të madh për modelet stokastike të rrjedhës së ujit në tokë. Ata përdorin modelet stokastike në mënyrë efektive në punën e tyre kërkimore, shiko Freeze (1975), Cordova dhe Bras (1981), Chung dhe Austin (1987), Zhang (2002), P.Croisille (2005), Zhangxin Chen (2006), Yandita R. (2011), etj.

Të dhënat eksperimentale nga shumë vende, përfshirë Shqipërinë, mbështesin hipotezën se përcjellshmëria hidraulike e tokës së ngopur, poroziteti i kullueshëm, ringarkimi dhe avullimi janë variabla të rastit, shih Averjanov (1972), Van Schilfgaarde (1974-1979), Freeze (1975), Hubert (1976), Skaggs and Tang (1976), Sagar and Preller (1980), Cordova and Bras (1981), Kolaneci, Xinxo and Bica (1983), Chung and Austin (1987), Zhang (2002), P.Croisille (2005), Zhangxin Chen (2006), Yandita R. (2011), Sotir Tego (2019), etj. ([21], [22], [23], [24], [25], [26]).

Në varësi të mënyrës se si futet rastësia në rrjedhën e paqëndrueshme të ujit në tokë, ekzistojnë katër probleme matematikore, me një rritje të nivelit të kompleksitetit:

1. Problemi me kushtin fillestar të rastit.
2. Problemi me kushtin kufitar të rastit.
3. Problemi me rimbushjen e rastit ose evapotranspirimin e rastit.
4. Problemi me përçueshmërinë e rastësishme hidraulike ose porozitetin e kullueshëm të rastit.

Kapitulli është i organizuar si më poshtë. Në paragrafin 2.2 formulohet problemi (2.5), (2.6), (2.7) në një mjedis funksional të përshtatshëm. Në paragrafin 2.3 vërtetohet teorema e ekzistencës dhe unicitetit për problemin (2.5), (2.6), (2.7).

2.2 Hapësirat funksionale dhe formulimi i problemit

Le të jetë: (Ω, F, μ) ose (Ω, F, P) një hapësirë probabilitare, ku Ω = {ω} tregon hapësirën e ngjarjeve elementare (ose hapësirën e rezultateve themelore), F është σ-algjebra e shoqëruar me Ω, dhe μ (ose P) është masa probabilitare e përcaktuar. Algjebra σ e F mund të interpretohet si një koleksion i të gjitha ngjarjeve të rastit $\omega \in \Omega$ dhe që kanë një probabilitet të përcaktuar mirë në lidhje me F. Në studimin tonë do të përdoret teoria e Hapësirave Sobolev mbështetur në Adams (1975) dhe Tribel (1986).

Do të përdorim shënimin X=X(ω) për variablin rastësor me vlera reale: $X\colon \Omega -> R$.

Supozojmë se masa e probabilitare μ ka një bazë të numërueshme D$\subset R^2$ që tregon një zonë të kufizuar me kufij të lëmuar $\partial D,\ 0 < T < +\infty$

$$Q_T = D \times (0,T] \text{ and } S_T = \partial D \times (0,T]$$

Hapësira separabile (e ndashme) Hilbert $L^2(\Omega)$ është e mirënjohur. Shënimi

$$M= \{f(x,\omega): D \to L^2(\Omega)\}$$

tregon bashkësinë e funksioneve të rastit të rendit të dytë f(x,ω) mbi zonën D.
Përcaktohet hapësira

$$H= L^2(D; L^2(\Omega))= \{f= f(x,\omega) \in M\},$$

E paisur me normën

$$|| f ||_\Omega \in L^2(D)\},$$

dhe me produkt skalar

$$(f,g)_H = \int_D (f,g)_\Omega \, dx, \forall f,g \in H.$$

Norma e induktuar nga produkti skalar është:

$$|| f ||_H = \left(\int_D (|| f ||_\Omega^2 \, dx\right)^{1/2}, \forall f \in H.$$

Përkufizimet e hapësirave funksionale

$$C^\infty(D), \mathcal{L}(D), \mathfrak{D}^1\big(D; L^2(\Omega)\big), \ C^m\big(D; L^2(\Omega)\big), \text{ për } m \geq 0$$

$$C_c^m\big(D, L^2(\Omega)\big) \text{ dhe } H^m = H^m(D; L^2(\Omega)),$$

konsiderohen të njohura.
Për $f = f(x,\omega) \in M$ janë përkufizuar derivatet e përgjithësuar të rendit α
në lidhje me x:

$$D^\alpha f(\varphi)=(-1)^{|\alpha|} \int_D f \, D^\alpha \varphi dx, \ \varphi \in \mathfrak{D}(D), \ \alpha= (\alpha_1, \alpha_2), |\alpha|=\alpha_1+ \alpha_2).$$

Në qoftë se $f \in H^m = H^m(D; L^2(\Omega))$, gjurma e f në ∂D përcaktohet si

$$\gamma^{(m)}(f) = \{f, \frac{\partial f}{\partial}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} f}{\partial^{m-1}}\}, \ m=2,3,4,\ldots$$

Eshtë e qartë që $\gamma^{(m)}(f) \in \big(L^2(D); L^2(\Omega)\big)^m$, ku ana e djathtë tregon produktin kartezian.
Shqyrtohet hapësira e mëposhtme

$$H_0^m = H_0^m\big(D, L^2(\Omega)\big)= \{f \in H^m, \gamma^{(m)}(f) = 0\}$$

H_0^m është një hapësirë e mbyllur e H^m.
Hapesirat Banah $L^\infty(\Omega)$, $L^\infty(Q_T; L^2(\Omega))$ dhe $L^\infty((Q_T; L^\infty(\Omega))$ janë të njohura mirë.

Shqyrtohet hapësira separabile Hilbert V e tillë që V përfshihet në H, V⊂ H, $(V$, H, $V')$ është treshe Gelfand.

$(\, , \,)_V$ tregon produktin skalar në V,

$(\, , \,)_H$ tregon produktin skalar në H,

$(\, , \,)_{V^1}$ tregon produktin skalar në V′,

Normat e induktuara janë $\| \, \|_V$, $\| \, \|_H$, $\| \, \|_{V'}$

Respektivisht përcaktohet hapësira

$$L^2(0,T,V) = \{f = f(x,t,\omega): [0,T] \to V, \quad \int_0^T \|f\|_V^2 dt < +\infty\}$$

e pajisur me produktin skalar

$$(f,g)_{L^2(0,T,V)} = \int_0^T (f,g)_V dt \quad \forall f,g \in L^2(0,T,V)$$

Norma e induktuar nga produkti skalar është

$$\|f\|_{L^2(0,T,V)} = (\int_0^T \|f\|_V^2 dt)^{1/2}$$

$L^2(0,T,V)$ është hapësirë separabile Hilbert.

Në mënyrë të ngjajshme, përcaktohet hapësira separabile Hilbert $L^2(0,T,H)$, $L^2(0,T,V')$, $L^2(-\infty,T,V)$ dhe $L^2(-\infty,T,H)$, shiko Tribel (1986).

Përcaktohet hapësira

$$W(0,T) = \{f \in L^2(0,T,V) \, , D_t f \in L^2(0,T,V')$$

e pajisur me produktin skalar

$$(f,g)_w = \int_0^T [(f,g)_V + (D_t f, D_t g)_{V'}]dt \quad \forall f,g \in W(0,T)$$

Norma e induktuar në $W(0,T)$ nga produkti skalar është

$$\|f\|_W = (\int_0^T [\|f\|_V^2 + \|D_t f\|_{V'}^2]dt)^{1/2}$$

$W(0,T)$ është hapësirë separabile Hilbert

$$W(0,T) \subset C([0,T],H) \, ,$$

$$< u^{'}(t), v >= D_t(u(t),v)_H = (u'(t),v)_H \, ,$$

$$\forall \, u(t) \in W(0,T) \;\; dhe \;\; \forall \, v \in V$$

$$D_t\|u(t)\|_H^2 = 2 < u'(t), u(t) >, \forall\, u(t) \in W(0,T)$$

Shiko Dautary dhe Lions (1985), Tribel (1986).

Simboli $<.,.>$ tregon dualitetin midis hapësirave Hilbert V' dhe V.

Jepet familja $a(t,u,v)$ e formave bilineare të vazhdueshme të përcaktuara në $V \times V$ me parametër $t \in (0,T)$.

Supozohet se $a(t,u,v)$ plotësojnë kushtet

$\exists\ \alpha$ një konstante pozitive reale dhe $c = c(T)$ të tilla që

$$|a(t,u,v)| \leq c\|u\|_V\ \|v\|_V\ , \forall t\ \in (0,T),\ \forall u \in V\ dhe\ \forall v \in V \qquad (2.8)$$

$\exists$ konstantja $\mu > 0$ e tillë që

$$a(t,u,v) + \mu\|u\|^2{}_V\ \geq \alpha\|v\|_V{}^2\ , \forall t\ \in (0,T),\ \forall v \in V \qquad (2.9)$$

Familja e operatorëve të rastit A (t) e shoqëruar me $a(t,u,v)$ përcaktohet nga

$$a(t,u,v) =< A(t)u, v >, \forall t\ \in (0,T),\ \forall u \in V\ dhe\ \forall v \in V \qquad (2.10)$$

Është vertetuar se

$$\text{A(t)} \in L(v, V')\ \text{dhe}\ A(t) \in L(L^2(0,T,V); L^2(0,T,V'))$$

Në qoftë se $A(t)u\ \in H, \forall t\ \in (0,T),\ \forall u \in V,$ mund të vërtetohet se

$$< A(t)u, v >= (A(t)u, v)_H\ ,\ \ \forall v \in V \qquad (2.11)$$

Shqyrtohet ekuacioni evolucionar i rastit

$$D_t u(t) + A(t)u(t) = f(t)\quad (x,t,\omega) \in Q \times \Omega \qquad (2.12)$$

me kusht fillestar

$$u(0) = u_0\ ,\ \ (x,\omega) \in D \times \Omega \qquad (2.13)$$

Familja e operatorëve të rastit A(t) përcaktohet nga (2.10). Supozohet se $f(t) \in L^2(0,T,V')\ \ dhe\ \ u_0\ \in H.$

Problemi 2.1

Jepet $f(t) \in L^2(0,T,V'), u_0\ \in H\ \ dhe\ \ A(t)$ përcaktohet nga (2.10). Të gjendet fusha e rastit

$$u = u(x,t,\omega) \in W(0,T)$$

e cila kënaq (2.12) për të gjitha $(x,t,\omega) \in Q \times \Omega$ dhe (2.13).

Me përkufizim, $u = u(x,t,\omega)$ eshtë një zgjidhje për problemin (2.12), (2.13) nëqoftëse plotësohen kushtet e sipërpërmendura.

2.3 Ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjeve

Në këtë paragraf do të vërtetohet:

Teorema 2.1

Supozohet se kënaqen kushtet (2.8), (2.9). Vërtetohet se problemi 2.1 ka një zgjidhje të vetme.

$$u = u(x,t,\omega) \in W(0,T)$$

e cila varet në mënyrë të vazhdueshme nga të dhënat. Vërtetimi i Teoremës 2.1 kalon nëpër dy hapa.

Hapi 1. Reduktimi paraprak i problemit

Mund të supozohet se (2.9) kënaqet për λ = 0. Zëvendësohet $u = z^{ekt}$, ku k është një numër real arbitrar. Problemi 2.1 shndërrohet në problemin ekuivalent:

Të gjendet $z = z(x,t,\omega)$ që kënaq identitetin

$$a(t,z,v) + k(z,v)_H + D_t(z,v)_H = (e^{-kt}f,v)_H + (u_0,v)_H, \forall v \in V,$$

me $z(x,t,\omega) \equiv 0$ për t < 0. Në këtë identitet, $a(t,u,v)$ është zëvendësuar nga $a(t,z,v) + k(z,v)_H$. Zgjedhja $k = \lambda$ jep rezultatin e dëshiruar.

Për të vërtetuar ekzistencën e zgjidhjes së problemit stokastik (2.12), (2.13), modifikohet metoda Galerkin, e zhvilluar në [28], nga Dautray dhe Lions (1990), për ekuacionet diferenciale parabolike me derivate të pjesshme.

Hapësira Hilbert V është separabile. Atëherë, ∃ baza $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_m \dots$ në V në kuptimin: $\forall m \in N$ elementet $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_m \dots$ janë linearisht të pavarur dhe bashkësia e të gjitha kombinimeve lineare të fundme

$$\sum_n \zeta_n w_n , \qquad \zeta_n \in R , n \in N$$

është e ngjeshur në V

Për çdo m=1,2,3,…., përkufizohet zgjidhja e përafërt $u_m = u_m(x,t,\omega)$ për problemin (1.12), (1.13) duke përdorur metodën e mëposhtme

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \tag{2.14}$$

$$(D_t u_m, w_j)_H + a\big(t, u_m, w_j\big) =< f, w_j > \quad \forall j = 1,2,3, \dots, m \tag{2.15}$$

$$u_m(0) = u_{0m} \sum_{i=1}^{m} \zeta_{im} w_i \tag{2.16}$$

kur u_{0m} është projeksion ortogonal i $u_0 \in H$ mbi zonën hapësinore të tendosur në $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m$. Në përgjithësi, u_{0m} tregon secilin element të nën-hapësirës së lartpërmendur, e cili plotëson kushtin:

$$\lim_{m \to +\infty} \|u_{0m} - u_0\|_H = 0$$

Sistemi (2.15) me kushte fillestare (2.16) paraqet problemin Cauchy për funksionet e panjohura

$g_m(t) = \{g_{im}(t)\}_{i=1}^{m}$:$\{w_m D_t g_m(t) + A_m(t) g_m(t) = f_m(t)$, $g_m(0) = \{\zeta_{im}\}_{1 \le i \le m}$.

Matricat janë:

$$W_m = \left\| \left(w_i, w_j\right)_H \right\|_{1 \le i \le j \le m},$$

$$A_m(t) = \left\| a\left(t, u_i, w_j\right) \right\|_{1 \le i \le j \le m},$$

$$g_m(t) = \{g_{im}(t)\}_{i=1}^{m} \ and \ f_m(t) = \{f(t), w_j\}_{1 \le i \le m}$$

W_m është një matricë e padegjeneruar, sepse $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m$ janë linearisht të pavarura. Atëherë, sistemi (2.15), (2.16) ka zgjidhje të vetme $g_m(t)$ për $t \in (0, T)$, shiko Arnold (1975).

$f(t) \in L^2(0, T, V')$ nënkupton që $[g_{im}(t)]^2$ janë funksione me katror të integrueshëm. Prandaj

$$u_m = u_m(t) = u_m(x, t, \omega) \in L^2(0, T, V') \text{ dhe } D_t u_m(t) \in L^2(0, T, V') \tag{2.17}$$

Vertetësia e Teoremës 1 vazhdon në mënyrë të ngjajshme me argumentet e paraqitura nga Dautray and Lions (1990), f. 619—627.

Janë të vërteta rezultatet e mëposhtme:

$$D_t \|u_m\|_H^2 + 2\alpha \|u_m\|_V^2 \le 2 < f, u_m > \le \alpha \|u_m\|_V^2 + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}^2 \tag{2.18}$$

ku α tregon konstanten e koherencës në (2.9),

$$sup \|u_m(t)\|_H^2 \le \|u_0\|_H^2 + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,T,V')}^2,$$

Vargu $\{u_m(t)\}$ është i kufizuar në hapësirën $L^\infty(0,T,H)$, (2.19)

Vargu $\{u_m(t)\}$ është i kufizuar në hapësirën $L^2(0,T,V)$ (2.20).

Ekziston elementi $u \in L^2(0,T,V)$ dhe nënvargu m' i vargut m, i tillë që $u_{m'} \to u$ në $*$ topologjinë e dobët të hapësirës $L^\infty(0,T,H)$ për m'→ $+\infty$:

$\exists v \in L^1(0,T,H)$ e tillë që

$$\lim_{m' \to +\infty} \int_0^T (u_{m'} - u, v)_H dt = 0, \tag{2.21}$$

Ekzistojnë $u_* \in L^2(0,T,V)$ dhe nënvargu m'' i vargut m', e tillë që $u_{m''} \to u_*$ në topologjinë e dobët të hapësirës $L^2(0,T,V)$ për m''→ $+\infty$

$$\lim_{m'' \to +\infty} \int_0^T < u_{m''} - u_*, v > dt = 0 \ , \forall v \in L^2(0,T,V'), \tag{2.22}$$

$$u_* = u \text{ and } \lim_{m'' \to +\infty} \int_0^T (u_{m''} - u_*, v)_H dt = 0 \ , \forall v \in L^2(0,T,H), \tag{2.23}$$

$$u = u_* \in L^\infty(0,T,H) \cap L^2(0,T,V), \tag{2.24}$$

$u = u_*$është zgjidhje për problemin (2.12), (2.13). Kjo do të thotë, që kënaq ekuacionin (2.12) dhe kushtin fillestar (2.13).

Hapi 2. Vërtetimi i unicitetit të zgjidhjes

Supozohet se u dhe $\bar{u}$ janë dy zgjidhje për problemin (2.12), (2.13) me të dhëna {f, u_0} dhe { $\bar{f}$, $\overline{u_0}$}, respektivisht. Duke përdorur lemën Vishik-Ladizhenskaja, vërtetohet

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(0,T,V)} \leq \frac{1}{\alpha} \|u_0 - \overline{u_0}\|_H^2 + \frac{1}{\alpha^2} \|f - \bar{f}\|_{L^2(0,T,V')}^2$$

ku α tregon konstanten e kohercivitetit. Vërtetimi i Teoremës 2.1 është i plotë.

Vërejtje 2.1

Kushti i duhur kufitar për problemin stokastik (2.12), (2.13) varet nga zgjedhja e hapësirës Hilbert V dhe fushës së rastit $f = f(x,t,\omega)$. Zgjedhim

$$V = H_0^1\big(D, L^2(\Omega)\big)$$

dhe supozojmë se

$$(f, v) = \int E(f_1 v) dx + \int E(f_2 v) ds \ , \forall v \in V$$

kur $f_1 \in L^2(Q_T; L^2(\Omega))$ dhe $f_2 \in L^2(S_T; L^2(\Omega))$

Në këto raste, kushti i duhur kufitar për problemin (2.12), (2.13) është kushti Von Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial v} = f_2(x, t, \omega) \ , \quad (x, t, \omega) \in S_T \times \Omega, \ \ S_T = \partial D \times (0, T)$$

Vërejtje 2.2

Dallimi ndërmjet problemeve deterministe dhe stokastike të Boussinesq:

Metoda Galerkin është një përafrim i brendshëm i hapësirës Hilbert V, prandaj, në problemin stochastic Boussinesq diskreditohen variablat hapësinore x_1, x_2 si dhe ndryshorja e rastit ω.

Kapitulli 3

Uniciteti sipas trajetoreve dhe konvergjenca e zgjidhjeve të përafërta për një model stokastik të rritjes se tumorit me zhurmë të ngjyrosur

3.2 Hyrje

Në këtë kapitull të punimit do të studiojmë rritjen e një tumori heterogjen për regjimin e qelizave të shpërndara. Sipas [29], Bellomo dhe Preziosi (2000), regjimi i qelizave të shpërndara është një situatë ku qelizat tumorale nuk janë akoma të paketuara në një tumor të vëzhguar makroskopik dhe bashkëveprojnë me qelizat imune, antikanceroze etj. Interesi për këtë temë është shumë i madh nga fusha të ndryshme sic janë ato të biologjisë, fizikës dhe sidomos ajo e mjekesisë, prandaj dhe motivohet qartë për dy arsye.

Së pari, pas heqjes shëruese të një tumori, një sasi e vogël e qelizave të mbetura të tumorit mund të qëndrojnë në organizëm dhe mund të rriten në tumore sekondare ose metastaza të fjetura. Kjo është një pasojë e qelizave tumorale të qëndrueshme që janë metastazuar para operacionit kurativ dhe të cilat nuk mund të zbulohen nga teknikat aktuale radiologjike.

Së dyti, në fazat e hershme të rritjes së tumorit, kur madhësia e tumorit nuk është më shumë se grumbuj të vegjël të qelizave, konkurrenca midis qelizave tumorale dhe qelizave imune mund të adresohet akoma drejt shërimit të një tumori. Tumoret që patën sukses të rriteshin dhe të bëheshin të dukshëm klinikisht, u panë si rezultat i "gabimeve" nga ana e sistemit imunitar, me të cilat ai lejoi që kloni aberrant të shpëtonte si rezultat i plakjes ose një "korrupsioni" delikat të ushtruar nga qelizat tumorale. Rezistenca ndaj kimioterapisë përfaqëson një pengesë të mirë-organizuar për trajtimin efektiv të kancerit. Përgjigja ndaj kimioterapisë ndihmëse të kancerit varet nga prania e qelizave tumorale rezistente ndaj ilaçeve. Rezistenca ndaj ilaçeve kundër kancerit është një karakteristikë e kombinuar e një ilaçi specifik, një tumori specifik dhe një mjedisi specifik.

Me shfaqjen e rezistencës ndaj ilaçeve nënkuptohet zhvillimi i një nënpopullsie të re rezistente të qelizave tumorale për shkak të ndryshimeve të rastësishme gjenetike, të pavarura nga doza. Me induksion të rezistencës ndaj ilaçeve nënkuptojmë rekrutimin e varur nga doza e një nënpopullimi rezistent nga një linjë prindërore e ndjeshme më parë. Shpesh rezulton se rezistenca e fituar ndaj ilaçeve ndodh për arsye të një lloj ndryshimi të induktuar ose adaptues në qelizat tumorale, të shkaktuar nga vetë ilaçi antikanceroz.

Sidoqoftë, ka të ngjarë që kjo rezistencë të lindë si pasojë e një procesi përzgjedhjeje që vepron mbi një popullatë qelizash heterogjene. Parregullsia gjenetike e shfaqur nga qelizat tumorale që nga fillimi do të çojë në një shumë të heterogjenitetit biologjik dhe molekular. Zbatimi i kimioterapisë në këtë pikë do të zgjedhë shpejt qelizat që progresivisht tregojnë rezistencë ndaj ilaçeve antikanceroze.

Sipas hipotezës epigjenetike, rezistenca e fituar ndaj ilaçeve është pasojë e një numri të madh fenomenesh biologjike ndërvepruese gjatë evolucionit të kancerit:

a) Zhvillimi i mutacioneve të rastësishme në gjenet kryesore që ndikojnë në ndjeshmërinë e ilaçeve.

b) Induksioni i drejtpërdrejtë i ndryshimeve molekulare në qelizat tumorale në përgjigje të ndrydhjes kimioterapeutike [6, 8].

Kapitulli është organizuar në 4 paragrafe. Pas hyrjes, paragrafi 3.2 analizon veçantitë e trajektoreve. Paragrafi 3.3 shqyrton konvergjencën e zgjidhjeve të përafërta rrjetore për zgjidhjen e problemit. Më në fund, paragrafi 3.4 i kushtohet disa zbatimeve biomjekësore.

3.2. Uniciteti sipas trajektoreve

Shqyrtohet uniciteti sipas trajektoreve i ekuacionit diferencial stokastik me derivate të pjesshme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) + \sigma(u)W, \qquad t \in R_+, x \in R^3 \tag{3.1}$$

me kusht fillestar $u(0,x) = u_0(x),\ x \in R^3$ dhe me zhurmë me ngjyrë, ku $u = u(t,x)$ është një fushë e matshme në $R_+ xR$. Zhurma me ngjyrë $W = W(t,x)$ pranohet se është një martingal Gaussian, e matshme në $R_+ xR^3$ në kuptimin e Walsh, përcaktohet në një hapesirë të filtruar probabilitare (Ω, F, F_t, P) dhe kënaq këto kushte: Zhurma W mund të karakterizohet nga konvarianca e saj

$$J_K(\phi,\psi) \equiv E[W(\phi)W(\psi)] = \int_0^\infty \int_{R^3}\int_{R^3} \phi(s,x)K(x,y)\psi(s,y)dxdyds, \text{ për } \phi,\psi \in C_c^\infty(R_+ x R^3).$$

Bërthama korrelative $K = K(x,y)$ e zhurmës W kënaq këtë kusht: $K = K(x,y)$ është i kufizuar nga një bërthamë

$$|K(x,y)| \le c[|x-y|^{-\alpha} + 1], \qquad \forall x,y \in R^3,$$

ku $\alpha > 0$ është një konstante e përshtatshme. Ne konsiderojmë një zgjidhje stokastike të dobët të ekuacionit (3.1).

Përkufizim 3.2 (Uniciteti sipas trajektoreve)

Uniciteti i zgjidhjes i referohet ekuacionit (3.1) në hapësirën $C(R_+, C_{tem})$ nëqoftëse, për çdo kusht fillestar $u_0 \in C_{tem}$, çdo zgjidhje stokastike e dobët për ekuacionin (3.1) me trajektore a.s. në $C(R_+, C_{tem})$ të jetë e barabartë me probabilitetin 1. Kjo do të thotë: Kurdoherë që (u, W, u_0) dhe $(\bar{u}, \bar{W}, \bar{u}_0)$ janë dy zgjidhje stokastike të dobëta të ekuacionit, të përcaktuara në të njëjtën hapësirë probabilitare të filtruar (Ω, F, F_t, P) me $W = \bar{W}$ dhe $u_0 = \bar{u}_0$, do të kemi $u(t,x) = \bar{u}(t,x)$ pothuajse me siguri për çdo $t > 0$ dhe $x \in R^3$.

Teorema 3.1

Supozohet se zhurma W është një martingal Gaussian e matshme në $R_+ x R^3$, ku bërthama korrelative kënaq $(A)_0$. Supozohet se $f(u)$ dhe $\sigma(u)$ kënaqin kushtin e rritjes $|f(u)| + |\sigma(u)| \le c(1+|u|)$, $\forall u \in R$. Supozohet se $f(u)$ është i vazhdueshëm Lipschitz. Supozohet se koeficienti i zhurmës $\sigma(u)$ është i vazhdueshëm dhe kënaq kushtet Yamada-Watanabe: Ekziston një funksion $\delta = \delta(x) : R_+ \to R_+$, i tillë që

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| \le \delta(|u-v|), \forall u,v \in R \text{ dhe } \int_{0^+} \frac{dx}{\delta^2(x)} = \infty .$$

Supozohet se kënaqet kushti fillastar $u_0(x) \in C_{tem}(R^3)$. Atëherë uniciteti sipas trajektoreve vlen për zgjidhjet stokastike të dobëta $u = u(t,x)$ për ekuacionin

$$u(t,x)=\int_{R^3} p(t,x,y)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^3} p(t-s,x,y)f(u(s,y))dyds+\int_0^t\int_{R^3} p(t-s,x,y)\sigma(u(s,y))W(ds,dy) \tag{3.2}$$

për çdo $t \geq 0$ dhe $x \in R^3$, ku $p(t,x,y)$ tregon bërthamën 3 dimensionale.

Vërtetimi i Teoremës 3.1

Argumentet e dhëna nga Mytnik, Perkins dhe Sturm në [14] (2006), mbeten të vlefshme në mjedisin tonë. Është bërë me pak kujdes për të justifikuar praninë e termit të zhvendosjes dhe disa prej rezultateve të konvergjences. Kjo mund të bëhet duke përdorur metodat standarde të SPDEs (Standard Partial Differential Equations).

Verejtje 3.1

Teorema 3.1 qëndron e vërtetë nëqoftëse marim parasysh zgjidhjet e dobëta stokastike të ekuacionit (3.2) me trajektore në hapësirën $C(R_+, L^p_\gamma(R^3))$, ashtu siç është bërë në punën e Viot (PhD thesis 1976), i cili dëshmoi unicitetin sipas trajektoreve në zonat e kufizuara R^3për $\sigma(u)=\sqrt{u(1-u)_+}$, ku nënvizimi tregon se është marrë pjesa positive e funksionit $u(1-u)$. Në këtë rast, zgjidhjet stokastike të dobëta $u(t,x)$ të ekuacionit (3.2) nuk janë domosdoshmërisht të dobëta. Ekzistenca e zgjidhjeve të dobëta stokastike jepet nga Teorema 3.2.

Teorema 3.2

Supozohet se $u_0 \in C_{term}$, termi i zhvendosjes $f(u)$ dhe koeficenti i zhurmës $\sigma(u)$ janë funksione të vazhdueshme që kënaqin kushtin e rritjes $|f(u)|+|\sigma(u)| \leq c(1+|u|)$ për çdo $u \in R.$ Supozohet më tej se $\alpha \in (0,2)$. Atëherë ekziston një zgjidhje e dobët me trajektore të thjeshtë në $C(R_+, C_{term})$. Ndërkaq konkuzioni i Teoremes 3.1 për unicitetin sipas trajektoreve, i përshkruar në vërejtjen 3.1 më sipër, sjell ekzistencen e një zgjidhje të fortë stokastike për ekuacionin (3.2). Kjo është një zgjidhje e përshtatur me filtrimin kanonik të zhurmës me ngjyrë W.

Vërtetimi vazhdon si në argumentin klasik të ekuacioneve diferenciale stokastike, shiko Yamada dhe Watanabe [27].

3.3 Konvergjenca e zgjidhjeve të përafërta probabilitare

Teorema 3.3

Le të jetë $u(t,x)$ një zgjidhje e dobët stokastike për ekuacionin (3.2) me koeficientë $f(u)$ dhe $\sigma(u)$ që kënaqin kushtin e ritjes

$$|f(u)|+|\sigma(u)|\le c(1+|u|),\quad \text{për çdo } u\in R.$$

Supozohet se $p>5$ dhe $E[\|u_0\|^p_{\frac{\lambda}{p},\infty}]<\infty$. Supozohet më tej se $T>0$. Atëherë ekziston një konstante $c(T)$, e tillë që

$$E[\sup_{0\le t\le T}\|u(t,x)\|^p_{\gamma,p}]\le c(T) \tag{3.3}$$

ku $u(t,x)\in C(R_+,C_{\frac{\lambda}{p}}(R^3))$ dhe për çdo $T>0$ ekziston konstantia $c(T)$, e tillë që

$$E[\sup_{0\le t\le T}\|u\|_{\frac{\lambda}{p},\infty}]<\infty \tag{3.4}$$

Vërtetimi i Teoremës 3.3

Argumentet ndjekin arsyetimet logjike të dhëna në Sturm A., (PhD thesis Oxford 2006). Së pari tregojmë se nën supozimet e Teoremës 3.3, inekuacioni (3.3) sjell (3.4). Pastaj zbatohen Teorema 3.1, Lema 7, Përkufizimi 8, Lema 6 (sipas referencës më sipër), inekuacioni Jensen, inekuacioni Cauchy-Schwartz dhe teorema Taylor. Ne vërtetojmë se $u(t,x)\in C_\lambda(R^3)$ për çdo $t\in[0,T]$. Në fund të vërtetimit rezulton se $u(t,x)\in C([0,T],C_\lambda(R^3))$ për çdo $T>0$, atëherë $u(t,x)\in C(R_+,C_\lambda(R^3))$.

3.4. Zbatime

Zbatohen teoremat 3.1, 3.2 dhe 3.3 për të studiuar rritjen e tumorit për rregjimin e qelizave të shpërndara duke marrë parasysh disa raste të vecanta të $\varphi(u), l(u), d(u)$ dhe $\sigma(u)$.

3.4.1 Ritmi i përhapjes së qelizave tumorale të ndjeshme ndaj ilaceve

Ritmi i shkallës së përhapjes logjistike jepet nga formula

$$\varphi(u)=\begin{cases} au(b-u), & \text{për } 0\le u\le b,\\ 0, & \text{në rastin e kundërt}\end{cases}$$

Ritmi i shpejtësisë së përhapjes që korrespondon me aktivizimin e qelizave të ndjeshme të tumorit është

$$\varphi(u)=\begin{cases} au(b^2-u^2) & \text{për } 0\le u\le b \\ 0 & \text{në rastin e kundërt}\end{cases}$$

Ritmi i shpejtësisë së përhapjes që korespondon me frenimin është

$$\varphi(u)=\begin{cases} au(b-u)^2 & \text{për } 0\le u\le b, \\ 0 & \text{në rastin e kundërt}\end{cases}$$

Ritmi i shpejtësisë së përhapjes që korespondon me frenimin e aktivizimit është

$$\varphi(u)=\begin{cases} ab^n u-au^{n+1} & \text{për } 0\le \mathrm{u}\le \mathrm{b} \\ 0 \text{ në rastin e kundërt, me n} \ge 2 & \end{cases}$$

Termi i normës përhapëse të von-Bertalanfy-Richard është (shih[55])

$$\varphi(u)=\begin{cases} au^m(b-u)^n & \text{for } 0\le u\le b \\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

ku $m>1$ dhe $n>1$ janë dy parametra.

Ritmi i përhapjes së shpejtësisë Gompertz është (shih [55]).

$$\varphi(u)=\begin{cases} au^m(\ln b-\ln u) & \text{për } 0\le u\le b \\ 0 \text{ në rastin e kundërt, me } m>1 & \end{cases}$$

Vihet re se përvec modelit Gompertz, të gjithë termat e tjerë të shpejtësisë përhapëse janë Lipschitz të vazhdueshme.

3.4.2 Termi i zhurmës

Shqyrtohen katër modele të ndryshme për termin e zhurmës, shih [10] dhe [12].

Modeli Michaelis-Menten

$$l(u)=\begin{cases} 0 & \text{për } u<0 \\ c_1u(c_2+u)^{-1} & \text{për } 0\le u\le b \\ l(b) & \text{për } u>b\end{cases}$$

Modeli Lefever

$$l(u)=\begin{cases} 0 & \text{për } u<0 \\ \alpha u(1+\beta u)(\gamma u^2+\delta \mathrm{u}+1)^{-1} & \text{për } 0\le u\le b \\ l(b) & \text{për } u>b\end{cases}$$

Modeli Kusnetsov

$$l(u)=\begin{cases} 0 & \text{për } u<0 \\ \alpha u & \text{për } 0\le u\le b \\ l(b) & \text{për } u>b \end{cases}$$

Modeli Freundlich

$$l(u)=\begin{cases} 0 & \text{për } u<0 \\ \alpha u^2 & \text{për } 0\le u\le b \\ l(b) & \text{për } u>b \end{cases}$$

3.4.3 Zhurma e qelizave të ndjeshme të tumorit të asgjësura për shkak të ilaçeve kundër kancerit

Shprehja e zakonshme për funksionin e asgjësimit të qelizave tumorale nga ilaçet është proporcionale me përqendrimin e ilaceve brenda tumorit (në disa çështje, brenda qelizës tumorale të ndjeshme dhe madhesisë aktuale të popullatës së qelizave tumorale ndaj ilaceve , shiko [14], [15]. Prandaj:

$$d(u)=\begin{cases} 0 & \text{për } u<0 \\ K\mu u & \text{për } 0\le \mathrm{u}\le \mathrm{b} \\ d(b) & \text{për } u>b \end{cases}$$

ku μ tregon përqëndrimin e ilacit brenda tumorit dhe K tregon parametrin vrasës të ilaçit shih [15] dhe [16]. Një shprehje tjeter për $d(u)$ e propozuar është

$$d(u)=\begin{cases} 0 & \text{për } u<0 \\ \alpha\mu u(c+\mu)^{-1} & \text{për } 0\le \mathrm{u}\le \mathrm{b} \\ d(b) & \text{për } u>b \end{cases}$$

3.4.4 Trajektoria e termit të zhurmës

Shqyrtohen shprehjet e mëposhtme për termin e zhurmës

$$\sigma(u)=\begin{cases} 0 & \text{for } u<0 \\ \mathrm{c}\sqrt{u} & \text{for } 0\le \mathrm{u}\le \mathrm{b} \\ \sigma(b) & \text{for } u>b \end{cases} \quad \text{dhe} \quad \sigma(u)=\begin{cases} a\sqrt{u(b-u)} & \text{for } 0\le u\le b \\ 0 & \text{for } u\in(-\infty,\infty)\setminus[0,b] \end{cases}$$

Ja disa prej vlerave përfaqësuese të parametrave

$$b=10^6 \text{ qeliza/mm}^3,\ D=10^{-10}\,\mathrm{cm}^2/s,\ \lambda=1.1\text{ ditë}^{-1},\ \alpha=10^{-6}$$

Propozohen disa zbatime të rezultateve tona matematikore në imunoterapi ose terapi gjenetike për kancerin. Zbulimi i rëndësishëm që antigjeni i tumorit mund të kërkojë përgjigje imune specifike të tumorit në pacientët me kancer ka dhënë një impuls të ri për mundësinë e trajtimit të pacientëve me kimioterapi [7, 8, 10, 12, 13, 17 dhe 19]. Për të qenë më konkret, shqyrtohen qelizat dentritike (Dentritic Cells - DC) të cilat janë qeliza shumë efektive që paraqesin antigjen. Ato janë të afta të fillojnë me efektshmëri përgjigjen imune specifike të tumorit të klasës I dhe klasës II [13]. Kanceret e zorës së trashë të njeriut infiltrohen nga DC. Për më tepër, në këto tumore është treguar prodhimi lokal i një citokine, GM-CSF (një faktor homotopietik i rritjes), që nxit diferencimin e monociteve të gjakut periferik në DC, shih [12]. Këto vitet e fundit DC përdoren në provat klinike të imunoterapisë së kancerit.
Mund të zbatohet modeli matematik stokastik i rritjes së tumorit për regjimin e qelizave të shpërndara për të vlerësuar ndikimin e DC në kimioterapinë e trajtimit të kombinuar + imunoterapinë e kancerit e zorës së trashë të njeriut. Strategjitë e kimioterapisë molekulare synojnë të arrijnë shpërndarjen ose shprehjen selektive të një gjeni toksik në qelizat tumorale për të nxitur çrrënjosjen e tyre ose për të rritur ndjeshmërinë e tyre ndaj kimioterapisë ndihmëse. Kimiosensibiliteti gjenetik mund të arrihet duke nxitur apoptozën, duke frenuar molekulat intraqelizore të përfshira në rezistencën e ilaçeve të induktuar, ose duke rritur prodhimin intratumoral të barnave citotoksike.
Për të lehtësuar apoptozën, gjenet si p53 mund të administrohen në qelizat tumorale për të rritur mekanizmat e apoptozës të shkaktuar nga ilaçet [6, 11, 15]. Rregullimi gjenetik i uljes së faktorëve qelizorë në lidhje me rezistencën e ilaçeve është treguar për të rritur ndjeshmërinë e ilaçeve [16]. Gjithashtu, gjenet mund të administrohen në mënyrë intratumorale, për të rritur konvertimin metabolik të barnave antikancerogjene. Për shembull, transferimi i një gjeni citokrom P450 të mëlçisë, CYP2B1, në qelizat e gjirit femëror i sensibilizoi shumë këto qeliza në ilaçin antikancer ciklosfosfamid si pasojë e aftësisë së fituar për aktivizimin e ilaçeve intraqelizore.
Ky efekt prodhoi një aktivitet antitumor të rritur ndjeshëm [13]. Gjithashtu, janë bërë përpjekje për të prodhuar vargje gjenetike që mbrojnë qelizat e palcës së kockave nga efektet toksike të ilaçeve antikancerogjene, duke lejuar kështu administrimin e dozave më të larta të ilaçeve [16]. Efektet e metodave të përmendura më sipër të kimioterapisë molekulare në drejtim të avantazhit të mbijetesës dhe zvogëlimit të rrezikut të rrishfaqjes në pacientët me kancer janë vlerësuar të dobishme.

Kapitulli 4

Atraktorët e rastit për ekuacionet gjysmëlineare stokastike të reaksion difuzionit me zhurmë reale në hapësirat e Hilbertit

4.1 Bashkësitë thithëse dhe atraktorët

Në fillim përkufizohet atrakori global $A = A(\omega)$ për një sistem dydimensional ekuacionesh diferenciale të rastit. Supozohet ekzistenca e një bashkësie thithëse kompakte, e cila është e rastit në kuptimin e trajtuar në këtë punim.

Supozohet se ekziston një bashkësi thithëse

$K = K(\omega): \Omega \to B(\Omega)$ e cila jashtë një bashkësie me mase zero P,

$K(\omega)$ është kompakte dhe

1) Për çdo bashkësi të kufizuar $B \subset X$ ekziston
   $\bar{t} = \bar{t}(\omega) \in T$, e tillë që
   $\gamma(t,\omega)\mathrm{B} = K(\omega), \forall t > \bar{t}$.
2) $\exists\ \bar{t} = \bar{t}(\omega) \in T$ e tillë që
   $K(\omega) \subset K\big(\gamma(s,\omega)\big), \forall s \geq \bar{t}$. (4.1)

Kushtet (4.1) përbëjnë një sistem dydimensional të rastit. Ato gjenerohen nga ekuacioni (1.8) me kusht fillestar (1.9) kryesisht për shkak të supozimit të shtrëngimit (A4) – Kap.1

Shpesh, vërtetohet ekzistenca e bashkësive thithëse $K(\omega)$ për të nxjerrë vleresimet kryesore për zgjidhjen e problemit evolucionar të rastit në shqyrtim.

Vërtetohet ekzistenca e bashkësive thithëse $K(\omega)$ në hapësirat e Hilbertit H dhe V.

Përkufizim

Bashkësi omega-limit e bashkësisë thithëse $K(\omega)$ quhet :

$$A(\omega) = \bigcap \overline{\bigcup_{s \geq t \geq 0} \gamma(s,\omega) K(\omega)} \qquad (4.2)$$

Nga kushtet (4.1), $A(\omega)$ është bashkësi joboshe dhe kompakte për $\omega \in \Omega$, si limit i një familje monotone zvogëluese bashkësish joboshe dhe kompakte. Ne mund të provojme të shprehim në një mënyrë të dobishme nocionin deterministik të atraktorit global për sistemet dydimensionale të rastit. Pikëpamja jonë këtu është të shqyrtohet atraktori $A(\omega)$, i përcaktuar për çdo $\omega \in \Omega$ fikse të hapësirës probabilitare të plotë (Ω, F, P), si grupi omega-limit i bashkësisë thithëse të rastit $\underline{K(\omega)}$.

Në versionin determinist, kur $\gamma(t)$ është një rrymë deterministe në hapësirën banahiane X, deterministiku analog i kushteve (4.1) është i vlefshem në vërtetimin që A i përkufizuar me (4.2) është atraktor global.

Versioni statistik, kushtet (4.1):

Vërtetohet se $A(\omega)$ është atraktor në bashkësinë thithëse $K(\omega)$, pothuajse e sigurt për probabilitetin P, (P – a.s.), në mënyrë të tillë që:

$$\lim_{t\to\infty} d(\gamma(t,\omega)K(\omega), A(\omega)) = 0 \tag{4.3}$$

për të gjitha bashkësite e kufizuara $B \subset X$,

Atraktori $A(\theta(t,\omega))$ në B kënaq kushtin

$$\lim_{t\to\infty} d(\gamma(t,\omega)\mathrm{B}, A(\theta(t,\omega))) = 0 \tag{4.4}$$

Sigurisht, dihet që konstatimi i mëposhtëm është ë vërtetë për të gjitha bashkësitë e kufizuara B $\subset X$:

$$\lim_{t\to\infty} d(\gamma(t,\omega)\mathrm{B}, A(\omega)) = 0 \tag{4.5}$$

Marrëdhënia (4.3) nxirret nga (4.2) nëqoftëse $A\big(\theta(t,\omega)\big) = A(\omega)$, për t mjaftueshmërisht të madhe, $t \in T$.

Në fakt, mund të vërtetohet :

$A(\omega) \subset A\big(\theta(t,\omega)\big), \forall t \geq \tau(\omega)\ P - a.s.$ dhe $A(\omega)$ është e matshme, në kuptimin e mëposhtëm: Një familje $A(\omega)$, bashkësi e mbyllur në hapësirën Banah (X, d), është e matshme, nëqoftëse $\forall x \in X$ funksioni $\omega \to d(A(\omega), x)$ është i matshëm. Gjithashtu, bashkësia e mbyllur $A(\omega)$ është $P - a.s.$ konstante dhe invariante në këtë kuptim: Ekziston $\Omega_0 \subset F$ me $P(\Omega_0) = 1$ dhe $\theta(t,\omega)(\Omega_0) \subset \Omega_0$, e tillë që $A(\omega)$ është e pavarur nga $\omega, \forall \omega \in \Omega_0$.

Bashkësia e mbyllur $A(\omega)$ është e lidhur $P - a.s.$ (P-pothuajse e sigurt), për të gjitha B $\in X$.

Me fjale të tjera, $A(\omega)$ është atraktor global që gjenerohet nga sistemi dydimensional i rastit nga zgjidhja e ekuacionit të rastit (1.8), me kushte fillestare (1.9).

Në këtë rast, atraktori global A(ω) është tërheqës i zakonshëm. Të jemi më specifikë, shqyrtohet ekuacioni i reaksion difuzionit me jolinearitet polinomial:

$$u_t = c(\xi)\Delta u - \sum_{k=0}^{2p-1} a_k(\xi)u^k, \tag{4.6}$$

$x \in D \subset \mathbb{R}^3,\ t \geq 0,\ p \in N,\ \Delta$ tregon laplasianin, dhe D tregon një bashkësi të hapur të kufizuar në hapësirën Euklidiane $\mathbb{R}^3$.

Supozohet se koeficenti difuzionit $c(\xi)$ është jo-negativ, i pavarur nga x, i kufizuar dhe i matshëm ξ.

Kushti fillestar i ekuacionit (4.6) është

$$u(0, x, \omega) = u_0(x, \omega). \tag{4.7}$$

Supozohet se kushti fillestar $u_0(x, \omega)$ kënaq (10).

Supozohet qe funksionet e rastit $a_K(\xi)$ janë të matshme në ξ dhe ekzistojnë konstantet reale $c_K < C_K$ (për $k = 0, 1, \dots, 2p-2$) dhe konstante pozitive $0 < c_{2p-1} < C_{2p-1}$ të tilla që $c_K \leq a_K(\xi) \leq C_K$, për çdo $\xi \in \mathbb{R}^m$. (4.8

Supozohet se $u = u(x) \in C^2(\overline{D})$ dhe $v = v(x) \in C^2(\overline{D})$. Atëherë, Teorema Green është e vlefshme. Ne do të përdorim mosbarazimin e Young:

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{\tau} a^\tau + \frac{1}{q} \cdot \varepsilon^{\frac{q}{\tau}} \cdot b^q,$$

i cili është i vërtetë për çdo $a, b, \varepsilon > 0,\ \tau \geq 1$, dhe $q = \frac{\tau}{\tau - 1}$.

Falë supozimeve të mëparshme dhe mosbarazimit Young, ekziston një konstante $C > 0$ e tillë që :

$$u \sum_{k=0}^{2p-1} a_k(\xi)u^k \geq \frac{1}{2} C_{2p-1} \cdot u^{2p} - C$$

Për formulimin abstrakt të ekuacionit (24), zgjidhen

$$H = L^2(d), \qquad V = H_0^1(D), \qquad V^1 = H^{-1}(D),$$

$$A(\xi, u) = -C(\xi)\Delta u + \sum_{k=0}^{2p-1} a_k(\xi)u^k,\ f(\xi) = -a_0(\xi).$$

Vërtetimi i supozimeve (A.1) – (A.5) dhe (f.1) - Kapitulli 1 - është i njohur, shiko p.sh. Chueshov [30]. Kështu, ne mund të zbatojmë Teoremën 2.1.

Në këtë mënyrë, vërtetohet:

Teorema 4.1

Sipas kushteve të mësipërme (4.8) dhe për koeficentin e difuzionit $c(\xi)$, ekuacioni stokastik i reaksion difuzionit (4.6) me kushte fillestare (4.7) ka një zgjidhje të vetme $u = (t, x, \omega)$.

Tani, përkufizohet fluksi γ:

$$\gamma(t, \omega)u_0 = u(t, x, \omega),$$

ku $u(t, x, \omega)$ është një zgjidhje e ekuacionit stokastik të reaksion difuzionit (4.6) me kusht fillestar (4.7).

Mund të verifikohet se fluksi $\gamma(t, \omega)$ kënaq supozimet, shih Brezniak, Capinski, dhe Flandoli [31, 32] për detajet.

Tani, mund të vërtetohet ekzisteca e bashkësise thithëse në hapësirën e Hilbertit $H = L^2(D)$ dhe $V = H_0^1(D)$ për sistemin dydimensional të rastit $\gamma(t, \omega)$ që gjenerohet nga ekuacioni stokastik i reaksion difuzionit (4.6) me kusht fillestar (4.7).

4.2 Bashkësitë thithëse në hapësirën Hilbert H

Përdoret mosbarazimi Young, dhe konkludohet nga (4.8) ekzistenca e një konstante $c_1' > 0$ e tillë që

$$\frac{1}{2}c_{2p-1} \cdot u^{2p} - c_1' \leq ug(u) \leq \frac{3}{2}c_{2p-1} \cdot u^{2p} + c_1' \tag{4.9}$$

Atëherë

$$g(u) = g(\xi, u) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k(\xi)u^k \,.$$

Zbatojmë formulën Green dhe kushtin kufitar $u(t, x, \omega) = 0,\ t \in T,\ x \in \delta D = \Gamma$, $\omega \in \Omega$, dhe vërtetohet se:

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2c\left||u|\right|^2 + 2\int_D \, ug(u)dx = 0,$$

ku | | dhe || || tregojnë përkatësisht normën në hapësirat e Hilbertit $H = L^2(D)$ dhe $V = H_0^1(D),\ c = c(\xi)$ tregon koeficentin e difuzionit, dhe $g(u) = g(\xi, u)$.

Më tej mund të nxirret :

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2c\left||u|\right|^2 + 2\int_D \, c_{2p-1} \cdot u^{2p}\, dx \leq 2c_1'|D|, \tag{4.10}$$

ku $|D|$ tregon masën Lesbegue të zonës D.

Sipas mosbarazimit Poincare, ekziston një konstante $\beta = \beta(D) > 0$ e tillë që :

$$|u| \leq \beta \left| |u| \right|, \ \forall u \in V.$$

PËRFUNDIME DHE REKOMANDIME

Në kapitullin e parë të disertacionit studjohen ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjeve stacionare të problemeve stokastike të reaksion-difuzionit në hapësirat Banah, në prani të zhurmës reale. Zbatohet metoda Galerkin për të vërtetuar ekzistencën dhe unicitetin e zgjidhjes.

Rezultat kryesor është Teorema 1.1, e cila përgjithësohet në Teoremën 1.2 për shumën e operatorëve monotonë.

Rezultatet e mësipërme zbatohen për problemet stokastike Boussinesq-Glover, problemet stokastike të përhapjes së nxehtësisë, problemet stokastike Fitz-Hugh-Nagumo, problemet stokastike Hodgin-Huxley, Lotka-Voltera, Belousov-Zhabotinski, etj..

Në kapitullin e dytë të disertacionit studjohet problemi stokastik dydimensional Boussinesq-Glover në hapësirat Hilbert H dhe V.

Rastësia është e pranishme në përcjellshmërinë hidraulike dhe në porozitetin e kullimit të tokës, në evapotranspirimin, në kushtet fillestare dhe në kushtet kufitare të problemit Boussinesq-Glover.

Nën disa pranime të përshtatshme, vërtetohen ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjes së problemit stokastik Boussinesq-Glover, shih Teorema 2.1.

Një hap tjetër i studimit tonë është përafrimi numerik i zgjidhjes së problemit stokastik Boussinesq-Glover.

Rezultatet e kapitullit II gjejnë zbatime të rëndësishme në drenazhimin e tokave bujqësore.

Në kapitullin e tretë të disertacionit studjohet një model stokastik i tumorit heterogjen me zhurmë të ngjyrosur, në prani të kimioterapisë ndihmëse.

Dy probleme kryesore janë studiuar:

1.) Uniciteti sipas trajektoreve i zgjidhjes së ekuacionit stokastik (3.1) në hapësirën $C(R_+,R_{tem})$, i shoqëruar me kusht fillestar të dhënë $u_0 \in C_{tem}$.
2.) Uniciteti zgjidhjes së fortë dhe konvergjenca e zgjidhjeve të përafërta probabilitare.

Janë vërtetuar:

Teorema 3.1 për unicitetin e zgjidhjes probabilitare sipas trajektoreve dhe Teorema 3.2 për konvergjencën e zgjidhjeve të përafërta probabilitare.

Janë paraqitur disa zbatime biomjekësore të Teoremës 3.1 dhe Teoremës 3.2 në rritjen e tumoreve heterogjene për regjimin e qelizave kanceroze të shpërndara, duke ndjekur (kontrolluar) edhe trajektoren e termit të zhurmës së ngjyrosur. Janë propozuar zbatime të rezultateve matematike në terapinë gjenetike dhe në imunoterapinë e kancerit kolorektal (kancerit të zorrës së trashë).

Celsi i suksesit në studimin matematik të rritjes së tumorit në regjimin e qelizave kanceroze të shpërndara qëndron në faktin e pavarësisë së sjelljes së këtyre qelizave: Të gjitha qelizat kanceroze të secilit pacient sillen të pavarura nga njëra-tjetra, duke filluar nga vendlindja dhe nga kohëlindja e këtyre qelizave kanceroze.

Në kapitullin e katërt të disertacionit studjohen bashkësitë thithëse dhe atraktorët për problemin gjysmë-linear stokastik të reaksion-difuzionit në hapësirat hilbertiane $H = L^2(D)$ dhe $V = H_0^1(D)$.

Duke respektuar disa pranime të përshtatshme (dhe të arsyeshme), vërtetohet Teorema 4.1 mbi ekzistencën e bashkësisë thithëse në hapësirat hilbertiane $H = L^2(D)$ dhe $V = H_0^1(D)$.

Rekomandohet përdorimi dhe zbatimi i Teorisë së Ekuacioneve Diferenciale Stokastike me Derivate të Pjesëshme në hapësira hilbertiane, banahiane, Teoria e hapësirave të Sobolevit, Teoria e martingaleve, Teoria e Ekuacioneve Stokastike të Reaksion-Difuzionit, Teoria Moderne e Probabilitetit, Metoda Garlekin, Metoda e Diferencave të Fundme, Teoria e Zhurmës së Bardhë dhe Zhurmës Reale.

Ekziston një mundësi e bazuar shkencërisht për bashkëpunime të suksesshme dhe efektive ndërmjet Onkologëve, Imunologëve, Biologëve, Matematikanëve dhe Specialistëve të Shkencave Kompjuterike (Informatikanëve) për Kimioterapinë e pacientëve kancerozë.

Bibliografia

[1] Ethier S.N and Kurtz T.G,(2005) Markov Processes:Characterization and Convergence,Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics,Wiley

[2] Dawson D. and Perkins E., Measure valued processes and renormalization of branching particle systems, vol.64 of Mathematical Surveys and Monographs, pp 45-106, American Mathematical Society, 1999.

[3] Dunford N. and Schwartz J.T., Linear operations I General Theory, Interscience Pub., 1958.

[4] Esche S.et.al, FLT3 ligand administration inhibits tumor growth in murine melanoma and lymphoma, Cancer Res 58 (1998), 380-38.

[5] Dawson D., Measure valued Markov processes. In Ècole d'Ète de Probabilités de Saint-Flour XXI-1991, volume 154 of Lecture Notes in Mathematics, pp 1-260. Springer, Berlin 1993.

[6] Goldie J.H., Resistance and cancer chemotherapy: General Principles, in Fundamental of Cancer Chemotherapy, eds. K. Hellman and S.K.Carter, Mc Graw-Hill, 1987, 41-47.

[7] Gomez-Navaro J., Curiel D.T., and Douglas J.T., Gene therapy for cancer, Eur. J. Cancer (1999), 35(6), 867-885.

[8] Gregory W.M., Birkhead B.G., and Souhami L.R., A mathematical model of drug resistance applied to treatment for small-cell lung cancer, J.Clin.Oncol. 6(3), 1988, 457-461.

[9] Gyöngy I., Lattice approximation for stochastic quasilinear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise I. Potential Analysis 9, 1998, 1-25.

[10] Leith J.T. et al., Compositional stability of artificial heterogeneous tumors in vivo: Use of Mitomycin C, as a cytotoxic probe, Cancer Res 48(1988),2669-2673

[11] Lynch D.H. et al., FLT3 ligand induces tumor regression and antitumor immune responses in vivo, Nature(Med.) 3, 1997, 625-629.

[12] Machover D., A comprehensive review of 5-FU and leucovorin in patients with metastatic colorectal carcinoma, Cancer 80 (7), 1997, 1179-1187.

[13] McMichael A., Cytotoxic T lymphocites: Specificity, surveillance and escape, Adv. Cancer Res. 59 (1992), 227-244.

[14] Mytnik, Leonid, Edwin Perkins, and Anja Sturm (2006). "On Pathwise Uniqueness for Stochastic Heat Equations with Non-Lipschitz Coefficients." *The Annals of Probability*, vol. 34, no. 5, Institute of Mathematical Statistics, 2006, pp. 1910–59, http://www.jstor.org/stable/25449940.

[15] Rafferty J.A.et al.,Chemoprotection of normal tissues by transfer of drug resistance genes. Cancer and Metastasis Reviews 15(1996), 365-383.

[16] Schimke R.T., Gene amplification, drug resistance, and cancer. Cancer Res. 44 (1984), 1735-1742.

[17] Boldrini J.L. and Costa M.I.S., Therapy burdern drug chemotherapy, IMA J.Math Appl Med Biol 17 (1), 2000, 33-52.

[18] Kent M., Advanced Biology, Oxford University Press, 2000.

[19] Skell R.T., Handbook of Cancer Chemotherapy, Lippincot Williams & Wilkins, 1999.

[20] Tyn Myint-U, T. and Debnath, L. 2007. *Linear partial differential equations for scientists and engineers*, Birkhauser Boston, New York.

[21] P.Croisille, A. Ern, T. Lelievre, and J. Proft, (2005) “Analysis and simulation of a coupled hyperbolic-parabolic model problem”, J. Numer. Math., Vol. 13, No.2, pp. 81-103, 2005

[22] Zhangxin Chen, Guanren Huan and Yuanle Ma, (2006) "Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media", Copyright © 2006 by the Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, PA 19104-2688 USA.

[23] Sotir Tego (2019), Mekanika e fluideve, Shtëpia Botuese Pegi, Tiranë 2019

[24] ZHANG.D (2002), Stohastic Methods for Flow in Porous Media, Earth and Enviromental Sciences division Los Alamios National Laboratory, Los Alamos, NM 87545, USA,(2002,*350 faqe*)

[25] Burden, R.L. and Faires, J.D. and Reynolds, A.C. (2007). Numerical Analysis. Prindle, Weber & Schmidt, Massachusetts 0211.

[26] Yandita R., Hartanti A.R.D., Abidin A.Z. and Noezar I., (2011) “Reaction Condition Optimalization To Improve Superabsorbent Polymer Composite Absorbancy”, *Intl. Conference on Innovation in Polymer Science and Technology*, Bali, Indonesia 2011

[27] Yamada T. and Watanabe S., On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J.Math.Kyoto Univ. 11 (1971), 155-167

[28] Dautray, R.; Lions, J.-L., Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 3: Spectral Theory and Applications, f. 619- 627. Berlin etc., Springer-Verlag 1990. X, 515 pp., DM 198,OO. ISBN 3-540-50208-4

[29] Bellomo, N. and Preziosi, L. (2000) Modelling and Mathematical Problems Related to Tumor Evolution and Its Interaction with the Immune System. Mathematical and Computer Modelling, 32, 413-452. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(00)00143-6

[30] Igor Chueshov, Existence, Uniqueness Of Weak Solutions And Global Attractors For A Class Of Nonlinear 2d Kirchhoff-Boussinesq, Models Discrete And Continuous Website: http://aimSciences.org DYNAMICAL SYSTEMS Volume 15, Number 3, July 2006 pp. 777–809

[31] Brzeźniak, Zdzisław, Marek Capinski and Franco Flandoli. “Pathwise global attractors for stationary random dynamical systems.” *Probability Theory and Related Fields* 95 (1993): 87-102.

[32] Brzeźniak, Z., Capinski, M., & Flandoli, F. (1988). A convergence result for stochastic partial differential equations. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 24*, 423-445.

Punime të autorit të lidhura me studimin

[33] Sofije Hoxha, Fejzi Kolaneci, "A Mathematical Model of the Tumor Growth with Real Noise" International Congress on Fundamental and Applied Sciences 18-20 June 2019, University of New York - Tirana, Albania, http://icfas2019.intsa.org/belg/ICFAS2019-proceeding%20book.pdf

[34] Sofije Hoxha, Fejzi Kolaneci, "The Existence of Stationary Solution for Nonlinear Random Reaction-Diffusion Equation in Banah Spaces" International Journal of Mathematics Trends and Technology–IJMTT, Volume – 66 Issue 2 – Feb 2020, ISSN: 2349-5758 https://www.researchgate.net/publication/342382575_The_Existence_of_Stationary_Solution_for_Nonlinear_Random_Reaction-Diffusion_Equation_in_Banah_Spaces

[35] Sofije Hoxha, Fejzi Kolaneci, "Existence and Uniqueness Results for Two Dimensional Stochastic Linearised Boussinesq Equation" International Conference on Recent Social Studies and Research, ICSRC 2019, Proceeding Book, ISBN 9781647135799, 25-26 October 2019, Department Sapienza University, Rome-Italy.

[36] Sofije Hoxha, Fejzi Kolaneci, "Random attractor for semilinear stochastic reaction-diffusion equation with real noise in Hilbert spaces", International Conference on Mathematics, Statistics and Applied Science (ICMASTAS-20), 14th September-2020, Berlin, Germany, published in Solid State Technology, Volume: 63 Issue: 2s, Publication Year: 2020 http://solidstatetechnology.us/index.php/JSST/article/view/2489

[37] Sofije Hoxha, Fejzi Kolaneci, "The Uniqueness of Stationary Solution for Nonlinear Random Reaction-diffusion Equation ", Journal of Scientific Research & Reports, 26(9): 103-110, 2020; Article no.JSRR.62712, ISSN: 2320-0227 https://www.journaljsrr.com/index.php/JSRR/index

[38] Sofije Hoxha, Fejzi Kolaneci, "Path-wise uniqueness, convergence of approximated solutions for a stochastic model of tumor growth with colored noise" International Journal of Mathematical Analysis, Hikari Ltd, Italy, Vol. 14, 2020, no. 2, 61-76, ISSN 1314-7579 https://www.researchgate.net/publication/339087216_Path-wise_uniqueness_convergence_of_approximated_solutions_for_a_stochastic_model_of_tumor_growth_with_colored_noise